

SPHERICAL TRIGONOMETRY.

FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS;

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKI-UL-LAH,

HEAD MASTER, NORTON SCHOOL DELHI

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC
SOCIETIES OF ALLYPOUR AND SUBA BEHAR.

رسالہ عام مشات کروی

مدرسوں اور مکتبوں کے لیے معہ بہت سی مثالوں کے

مؤلفہ

Checked
1987

ڈاکٹر صاحب ایم. اے. ایف. آر ایس.

جسکو

منشی محمد ذکاء اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسائٹی علیحدہ اور سین ٹیفک سوسائٹی صوبہ بہار

اردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دہلی مطبع مرتضوی میں ہاشم حاجی محمد عزیز الدین

کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

SPHERICAL TRIGONOMETRY.
FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS.
WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. FODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHY MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC
SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رسالہ علم ماث کروی

مدرسوں اور مکتبوں کے لیئے معہ بہت سی مثالوں کے

مولفہ

ٹاڈہنٹر صاحب ایم اے ایف. آر. ایس.

جسکو

منشی محمد ذکاء اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسائٹی علیحدہ اور سین ٹیفک سوسائٹی صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

مقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی محمد عزیز الدین

کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ء



بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ علم مثلث کروی

جو علم مثلث مستوی کی تصنیف کرنی میں مصنف فی باتین ملحوظ خاطر رکھیں وہ سب اس کتاب کی تالیف میں ہی پیش ہوا و خاطر رکھیں اس میں اوسمیں تمام مسائل موجود ہیں جو علم مثلث کروی کی اکثر کتابوں میں ہو اگر تہ میں اور بہت سی مثالیں مشق کی واسطی لکھی ہیں اصل کتاب میں حد سے زیادہ محنت اس بات پر کی گئی ہے کہ وہ تمام جزئیات پر حاوی ہو اور بالکل صحیح ہو غرض کہ یہ کتاب معلوم اور طالب علموں کے لئے فائدہ مند ہے فقط

بھرنیکا لہر ہڈی مشر نور مل سکول دہلی

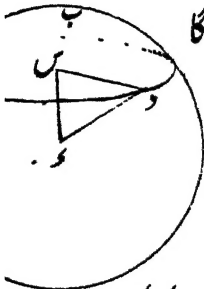
فہرست مضامین

باب	مضمون	صفحہ
اول	دواٹر عظیمہ و صغیرہ	۱
دوم	مثلث کروی	۴
سوم	ہندسہ کروی	۸
چہارم	مثلث کروی کے ضلع اور زاویوں کے علم مثلثی جنوں کے ارتباط	۱۵
پنجم	مثلث قائم الزاویہ کا حل	۳۰
ششم	مثلث غیر قائم الزاویہ کا حل	۴۳
ہفتم	مثلث کی اندر اور باہر چودا سری بنائی جائیں	۵۶
ہشتم	رقبہ مثلث کروی اور از زیادہ کروی	۶۷
نہم	تقریبی اور تخمینہ صور قانونیہ	۷۱
دہم	مساحہ ارض اور قطعات ارض	۷۹
یازدہم	اجزاء و مثلث کروی کی چھوٹی چھوٹی تبدیلیاں اور مثلث کروی اور مثلث مستقیمہ الاضلاع کے باہمی ارتباطات	۸۷
دوازدہم	محجمات کثیر السطوح	۹۱
سیزدہم	مسائل متفرقہ	۱۰۲
چہار دہم	مثلث کروی کا حل اعداد میں	۱۱۵

علم مثلث شکاری

باب اول دوائر عظیمہ و صغیرہ

(۱) کرہ وہ مجسم ہے جسکو ایک ایسی سطحی گہرا ہو کر اور اسکا ہر ایک نقطہ برابر فاصلہ پر ایک نقطہ معین ہو
اس نقطہ معین کو مرکز کرہ کہتے ہیں اور اس مرکز اور اس سطح کی کسی نقطہ میں جو خط طے اوسنی نصف قطر کرہ
جو خط مرکز سے کہنچا جائی اور سطح پر دو جانبوں میں ختم ہوا اسکو قطر کرہ کہتے ہیں
(۲) سطح کرہ کو جو کسی سطح مستوی سے تراشیں تو تراش ہی دائرہ پیدا ہوگا

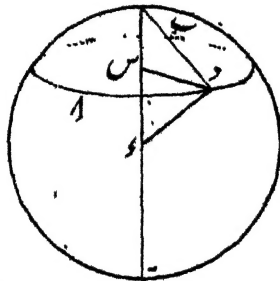


فرض کرو کہ کرہ کو جو سطح مستوی تراشتی ہے اوسی تراش اب پیدا ہونی ہی اور مرکز کرہ کا ہے
سطح مستوی پر مرکز سے عمود دس نکالو اور تراش میں نقطہ مقرر کر کے دو اور دس ملاؤ —
چونکہ دس عمود سطح مستوی پر ہی اسلئے زاویہ دس دو قائمہ ہی اور اسلئے دس = ۹۰ (۹۰ - دس) ہے
اب دس نقاط معینہ میں اور دس کی مقدار مستقل اور معین ہی اسلئے کہ وہ نصف قطر کرہ کا ہے
اسی ثابت ہوا کہ دس کی مقدار مستقل اور معین ہے — علیٰ ہذا القیاس تمام نقطی کے تراش سطح مستوی
میں واقع ہیں نقطہ معین سے سہی برابر فاصلہ پر واقع ہیں — اوسلئے تراش دائرہ ہی جسکا مرکز سہی
(۳) اگر سطح مستوی کرہ کی مرکز سے گزرتی ہو کر سطح کرہ کو تراشی تو نشان تراش کو دائرہ عظیم کہتے
ہیں اور اگر سطح مستوی کرہ کی مرکز سے نہ گزرتی تو نشان تراش کو دائرہ صغیرہ کہتے ہیں
اسی معلوم ہوا کہ قطر دائرہ عظیم اور کرہ کا ایک ہی ہوتا ہے اور تراش کو سطح متفاضل ہی کہتے ہیں
(۴) اگر کرہ کی سطح مستوی پر دو نقطی مقرر کئے جائیں تو نقطہ ایک ہی سطح مستوی صغیرہ میں

مرکز کردہ اور ان دو نقطوں پر گزرنی ہوئی کچھ سکتی ہے مگر اس صورت میں کہ یہ دو نقطی قطر کردہ کے اطراف ہوں اور وقت لانتہا سطحین ان نقطوں پر گزرنی ہوئی کچھ سکتی ہیں اسی ثابت ہوا کہ اگر دو نقطی سطح مستدیر کردہ پر اطراف قطر نہ ہوں تو صرف ایک دائرہ عظیم و نقطی نقطوں اور مرکز میں گزرتا ہوا کچھ سکتا ہے جب یہ دائرہ عظیم ایک ہی کنجی ہے تو وہ غیر مساوی حصوں میں دو نقطوں پر تقسیم ہوتا ہے اختصاراً قوس خورد کو ہم کہا کرتی ہیں کہ وہ دو نقطوں کو وصل کرتی ہے

(۵) کردہ کی کسی دائرہ کا محورہ قطر کردہ کا ہی جو سطح مستوی دائرہ پر عمود ہے اور محور کے اطراف کو قطبین کہتی ہیں۔ دائرہ عظیم کی قطبین برابر فاصلہ پر سطح مستوی دائرہ سی ہوتی ہے۔ دائرہ صغیر کی قطبین سطح مستوی دائرہ سی مساوی فاصلوں پر نہیں ہوتی اسلئے ایک قطب کو قطب قریب اور دوسرے کو قطب بعید کہتی ہیں اور بعض اوقات اختصار کیو اسطی قطب قریب کو قطب کہتے ہیں

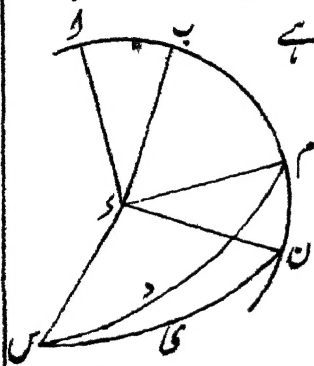
(۶) ایک دائرہ کا قطب برابر فاصلہ پر محیط دائرہ کے ہر نقطہ سے ہوتا ہے



فرض کرو کہ مرکز کردہ ہی۔ اور اب دائرہ کردہ کا ہی۔ س مرکز دائرہ کا۔ ق اور ق قطبین دائرہ۔ محیط دائرہ میں کوئی نقطہ مقرر کرو۔ لاؤ س دو جودوق د۔ ق و ق د۔ ق + س + د اور ق س اور س کی مقدار میں مستقل اور معین ہیں۔ اس وقت ق د مقدار مستقل اور معین ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ عظیم نقاط ق اور د پر گزرتا ہے۔ تو وتر ق د مقدار مستقل اور معین ہے۔ اسو اسطی دائرہ عظیم کی قوس جو ابین ق اور د کی واقع ہے ایک مقدار معین اور مستقل ہی خواہ دائرہ اب میں کوئی مقام دکا ہو

تو دو مقام خواہ کہیں محیط دائرہ پر ہو اس کی واسطی یہ بات سب جگہ موجود ہے
پس کسی دائرہ کی قطب کا فاصلہ محیط دائرہ کی ہر نقطہ سے ایک مقدار معین مثل رکہا ہی خواہ
اس فاصلہ کو خط مستقیم پر جو درمیان دو نقطوں کی واقع ہو پائیش کریں خواہ قوس دائرہ عظیم پر
جو ان نقطوں کی درمیان ہو

(۷) دو دائرہ عظیم کی قطبوں پر جو قوس دائرہ عظیم کی گذری اس کی مجازی مرکزہ پر جو زاویہ
ہو تاہی وہ سطح دو دائرہ عظیم کی زاویہ میلان کی برابر ہوتا ہے



فرض کرو کہ مرکزہ مذہبی — س دائرہ سی دائرہ عظیم میں جو نقطہ س پر متقاطع ہیں
اور آ اور ب قطب س دائرہ سی کے ہیں —

آ اور ب میں گذرنا ہوا ایک دائرہ عظیم کہنچو جس دائرہ سی سی نقاط م اور ن پر ملے —

پس آ و عمود س پر ہی اور س ایک خط سطح سے دس دین ہی — اور ب و عمود س

پر اور س سطح سے دس دین ہی — اس واسطی حکم (۴) ام اقلیدس کے دس عمود سطح

آ و ب پر ہے — اور اس واسطی دس عمودی خطوط ان اور م پر جو اسی سطح میں ملتے ہیں

— اسی ثابت ہوا کہ م ن زاویہ میلان سطح دس دائرہ سی کا ہے

اور زاویہ آ و ب = ا و م = ب و م = ب و ن = م و ن

(۸) دو دائرہ عظیم کے مابین جو زاویہ ہوتا ہی اسی مراد وہ زاویہ ہوتا ہی ہے یہ میلان سطح

کا ہو — جیسا کہ شکل گذشتہ میں زاویہ درمیان دو دائرہ عظیم س دائرہ سی کے م و ن ہے

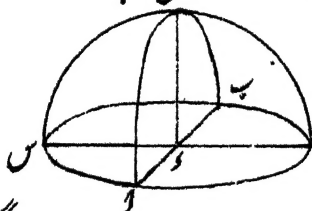
شکل دفعہ دین جو کہ ق و عمود سطح آ و ب پر ہی اس واسطی جو سطح ق و دین گذریگی سطح آ و ب

پہر عمود ہوگی اسے ثابت ہوا کہ زاویہ درمیان کسی دائرہ اور دائرہ عظیم کی جواو کی قطبوں پر گذرنا ہی قائمہ ہوتا ہی

(۹) دو دائرہ عظیمہ آپس میں ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں

اسو اسطی کہ ہر دائرہ عظیم کی سطح مرکز کرہ پر گذرے ہی اور فصل مشترک ان دائروں کا قطر کرہ ہوتا ہے اور سیوٹ وہ ہر یک دائرہ کا قطر ہی۔ اسو اسطی دو دائرہ عظیمہ ایک دوسرے کو ان نقاط پر تنصیف کرتے ہیں جن پر وہ آپس میں ملتی ہیں۔

(۱۰) دائرہ عظیمہ کے قطب سے جو قوس اسکی محیط کی کسی نقطہ تک پہنچ جائے ربعہ دائرہ ہوگی اور محیط پر زاویہ قائمہ بنائے گی



فرض کرو کہ ق قطب دائرہ عظیم اب س کا ہی تو قوس ق ربعہ دائرہ ہوگی اور اب س پہر قائمہ زاویہ بنائے گی

ولیل فرض کرو مرکز کرہ کا ہی ملاؤ ق و۔ لوق وسط اب س پر زاویہ قائمہ بنائے گا

چونکہ ق قطب اب س کا ہی اسو اسطی زاویہ ق و ل زاویہ قائمہ ہی اور قوس ق ربعہ دائرہ ہی اور چونکہ ق عمود سطح اب س پر ہی تو زاویہ جو درمیان سطح ق و ل اور اب س کی واقع ہوگا قائمہ ہوگا۔ اسو اسطی قوس ق عمود اس پر ہے

(۱۱) اگر دو دائرہ عظیمہ کی قوسیں سطح مستدیر کرہ کی نقطہ ق کو دو نقطہ ط و اور س سے جو سطح

مستدیر کرہ پر واقع ہیں متصل کریں اور یہ دو نقطہ اطراف مقابل قطر کی نہ ہوں اور ہر قوس

ربعہ دائرہ ہو تو ق قطب اب س کا ہوگا جو لقا ط و اور س پر گذرنا ہی (دفعہ ثانی کی شکل دیکھو)

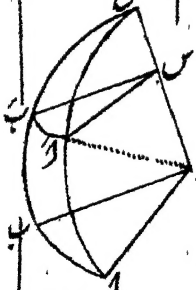
اسو اسطی کہ فرض کرو ق و اور ق س ربعہ دائرہ ہی ہیں اور مرکز کرہ کا ہی۔ چونکہ ق و اور

ق س ربعہ دائرہ ہی ہیں۔ زاویہ ق و س اور ق و ل قائمہ ہیں۔ اسی ثابت ہوا کہ ق و

قائمی زاویہ کی سطح اس پر بننا تاہی اور قی قطب دائرہ عظیمہ اس کا ہے
 (۱۲) دائرہ عظیمہ جو اور دائرہ عظیمہ کے قطبوں پر گزرتی ہیں دو دائرہ ثانیہ یا دائرہ تراحت کہلاتے ہیں
 دفعہ کی شکل میں یہ کہو کہ ق قطب ارب م ق کا ہی۔ اور سیوا سطح م اور س ن دائرہ
 ارب م ن کی دو دائرہ ثانیہ کی جسی ہیں م ن م ق یاس م اور س ن کی درمیانی زاویہ کا ہے
 یعنی زاویہ درمیانی دو دائرہ عظیمہ کا اوس قس سی بننا تاہی جو ان کی درمیان اوس دائرہ کی واقع
 ہو جسکی وہ دو دائرہ ثانیہ ہیں

(۱۳) اگر سطح مستدیر کہہ پر ایک نقطہ لین اور اسے دو قوسین دائرہ عظیمہ کی کچی جائیں اور وہ ایک
 دائرہ عظیمہ کی جسی نہ ہوں اور بی قوسین دائرہ معلوم پر زاویہ قائمی بنائیں تو وہ نقطہ قطب دائرہ کا ہوگا
 اسو سطح کے دو قوسین دائرہ معلوم کی سطح پر عمود ہیں اسو سطحی ان قوسوں کا فصل مشترک سطح دائرہ
 پر عمود ہوگا اور سیوا سطح یہ فصل مشترک محور دائرہ معلوم کا ہی۔ اسی ثابت ہوا کہ نقطہ جسی
 قوسین کچی گئی ہیں قطب دائرہ کا ہی

(۱۴) ایک دائرہ صغیر کی قوس کی محاذی مرکز پر ایک زاویہ ہی اور دائرہ عظیمہ کی قوس کی محاذی
 مرکز پر ہی زاویہ واقع ہی تو ان دو قوسوں کا پس میں مقابلہ کرو اور
 نسبت ان کی درمیان بنلاؤ کہ کیا ہی۔ فرض کرو کہ ارب قوس دائرہ
 صغیرہ کی ہیں۔ س مرکز دائرہ کا ہے۔ ق قطب دائرہ کا ہی۔
 مرکز کر کہ کا ہی۔ نقطہ ق سی دائرہ عظیمہ ق اور ق ب پچھ جو اوس



دائرہ سی کہ جسکا قطب ق ہی نقاط اور ب پر قطع ہوتی ہیں۔ س اور س ب دو دائرہ ب
 ملاؤ۔ قوس اور س ب اور ب اور ب یہ سب عمود ق پر ہونگی۔ چونکہ سطح
 اس ب اور ب عمود ق پر ہیں۔ سیوا سطح س اور متوازی ہوگا کا ہی اور س ب متوازی
 ہوگا کا ہے۔ سیوا سطح زاویہ اس ب = زاویہ ارب (بحکم ۱۰ ش ۱۱ م اقلیدس) کے۔
 اسی ثابت ہوا کہ نصف قطر س اور نصف قطر ارب (بجوبہ قولہ اعلم مثلث مستوی)

$$\text{اسی واسطی قوس } \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} \text{ جب فی } \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

باب دوم مثلث کروی

(۱۵) زاویہ مجسمہ میں جو زاویہ جہات متکوسہ بنی ہیں اور جہات مستوی جن زاویوں پر میلان

کرتی ہیں انکی باہمی ارتباطات اور تعلقات علم مثلث کروی سی دریافت ہوتے ہیں

(۱۶) فرض کرو کہ ایک زاویہ مجسمہ کا راس مرکز کرہ کا بنا یا جای تو وہ سطح مستوی کے زاویہ مجسمہ

کو بناتی تھیں کرہ کو دوائر عظیمہ کی قوسوں پر قطع کر نیگے پس سطح ایک شکل کرہ کی سطح مستوی

بجائے گی جبکہ مثلث کروی کہتی ہیں اسکو تین قوسیں دوائر عظیمہ کی احاطہ کر نیگے۔ بہر

صورت اسوقت ہوگی زاویہ مجسمہ میں تین زاویہ مستوی ہوں۔ اور اگر زاویہ مجسمہ میں

تین ہی زیادہ زاویہ مستوی ہوں تو انکی مطابق سطح مستوی کرہ پر ایک شکل پیدا ہوگی جسکو

دوائر عظیمہ کے تین قوسوں سے زائد قوسوں نے احاطہ کیا ہوگا اور اسکو کثیر الاضلاع کروی کہتے ہیں

(۱۷) تین قوسیں دوائر عظیمہ کی جنسی کہ مثلث کروی بنتا ہی اضلاع مثلث کروی کہلاتی ہیں۔

اور قوسوں جہان ہمتی ہیں اور دایان زاویہ پیدا ہوتی ہیں انکو اون زاویوں کو ظرایف مثلث کروی

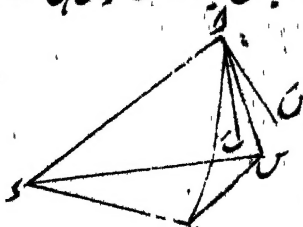
کہتی ہیں دفعہ ۸ کو دیکھو

(۱۸) مثلاً فرض کرو کہ مرکز کرہ کا ہی۔ اور ایک دو چمچہ نقطہ پر ایسا ہی کہ جو تین سطح

زاویوں سے بنتا ہی۔ اور فرض کرو کہ اب اور ب س اور س قوسیں دوائر عظیمہ کی ہیں

بغیر کرہ کو سطح زاویہ مجسمہ کی قطع کرتی ہیں تو اب س ایک مثلث کروی ہی اور قوسیں اب

اور ب س اور س و انکی اضلاع ہیں



فرض کرو کہ اب حماس نقطہ پر قوس اب کا اور اس حماس نقطہ پر قوس اس کا

اور حماس واسطی ب اور س کی جانب میں کھینچی گئی ہیں تو زاویہ ب اس مثلث کروی کے

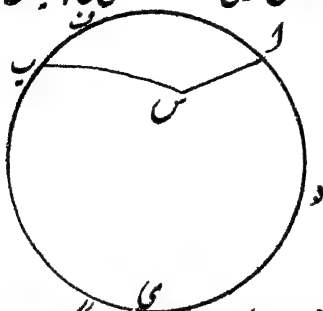
زاویوں میں سے ایک زاویہ ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس زاویہ تھا اور ب پر بنائی گئی
مثلث کروی کے زاویے ہونگے

(۱۴) علم مثلث کروی کے مطالب عظیم وہی ہوتی ہیں جو مثلثات کروی سے متعلق ہوتی ہیں
اسی واسطے یہ امر ضروری ہے کہ مثلث کروی اور اس کی اجزاء کی تصور کو خوب ذہن نشین کریں
مثلث کروی کی جو اضلاع ہوتی ہیں درحقیقت وہ دوائر عظیم کی قوسیں ہوتی ہیں اور یہ قوسیں
متناسب ان تین سطحی زاویوں کی ہوتی ہیں جنسی کہ زاویہ مجسمہ بنا ہی اور اس زاویہ مجسمہ کے مطابق
مثلث کروی بننا ہے دفعہ گذشتہ کی شکل میں مثلث کروی ا ب س کا ایک ضلع قوس ا ب ہے
اور زاویہ سطحی ا ب کا مقیاس قوس ا ب ہی ہے جب تک کہ کہ نہ بدلی قوس ا ب متناسب
زاویہ ا ب کا زاویہ مثلث کروی کی زاویہ میلان اور سطح کی ہوتی ہیں جنسی کہ زاویہ مجسمہ
بننا ہی وجہ اسکی یہی ہے کہ ا ب اور اس دو تو عمود و آہر ہیں اسلئے زاویہ ب اس زاویہ میلان
سطحی ا ب اور اس کا ہے

(۲۰) حروف ا ب اور س سے اکثر زاویہ مثلث کروی کی تعبیر ہوتی ہیں اور ط و طب و طس
سے اضلاع مثلث کروی کی۔ علم مثلث مستوی میں ا اور ب اور س کا استعمال اس
معنی میں ہوتا تھا کہ ہمانہ واحد کی معنی بخوبی سمجھ کر اور ان زاویوں کی فہمیت کسی ہمانہ واحد کے مطابق
اعداد میں بیان کیا کرنی تھی۔ مثلاً اگر س زاویہ قائمہ ہو تو س = ۹۰ اگر ہمانہ واحد
زاویوں کی ناپی کی لٹی درجہ مقرر کیا جائی اور س = ۹۰ جب ہمانہ واحد وہ زاویہ ہو جسکی سائے
کی قوس برابر نصف قطر کے ہو۔ پس سطحی اضلاع مثلث کروی کی متناسب اور ان زاویوں کے
ہوتی ہیں جو مرکز پر کرہ کی واقع ہوں اور انکی عددی قیمتوں کو ط و طب و طس سے تعبیر کرتی ہیں
خواہ ہمانہ واحد اسکا کچھ ہی ہو دفعہ ۲۰ علم مثلث مستوی کی موافق ہم اکثر زاویوں اور
اضلاع مثلث کروی کو مقیاس قوسی سے بیان کیا کرتے ہیں

(۲۱) سطح مستدیر کرہ پر جو قوس کچھ جایی وہ دائرہ عظیم کی قوس خیال کیجائیگی بشرطیکہ اوکھ

خلافت بالتصحیح بیان نہ کیا جائے
(۲۲) آسانی کی واسطی چھوڑنی اتفاق کر کی مثلث کروی کی ہر ایک ضلع کو نصف دائرہ سی کہلاتا ہے



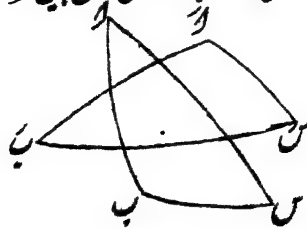
مثلاً شکل میں قوس ا د سی نصف دائرہ سی بڑی ہی اور اگر ہم چاہیں تو یوں خیال کریں کہ مثلث کروی قوسوں ا د سی اور ا س اور س ب سی بننا ہی اور اس کی زاویہ نقطہ ا د سی اور س پر ہیں۔ لیکن ہم سب اس بات پر متفق ہیں کہ ایسی مثلثوں کو خارج از بحث سمجھیں اور جس مثلث کی زاویہ نقطہ ا د س و ب پر ہیں اس کو یوں سمجھیں کہ وہ ا ب اور ب س اور س ا کے احاطہ کرنے سے پیدا ہوا ہے

(۲۳) دفعہ بالا کی قید سی یہ نتیجہ مستبط ہونا ہی کہ زاویہ مثلث کروی کا دو قائموں سی کم ہوتا ہی دلیل اس کی یہ ہے کہ فرض کرو ب س اور س ا اور ب سی د ا سی جو مثلث بننا ہی اور اس کا زاویہ ب س ا دو قائموں سی بڑا ہی اور قوس ب س خارج ہو کر ا سی سی د بڑی ہے تو بموجب دفعہ ۴ کی ب سی نصف دائرہ ہی اور ا سی واسطی ب سی نصف دائرہ سی بڑا ہی اسی معلوم ہوا کہ مثلث مفروضہ ا د س مثلثوں میں ہی نہیں ہی کہ جنسی ہم بحث کرتی ہیں

باب سوم ہندسہ کروی

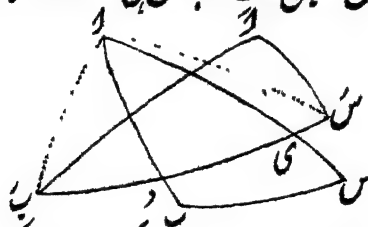
(۲۴) نتیجہ مثلث کروی میں جسکی اندر ضلع اور زوا یا، مثلث کروی کے تعلقات اور ارتباطات کی تحقیقات ہوتی ہی دوسرے مثلثی جملہ ضلع اور زاویوں کے اتنی میں ان جملوں سی پہلی ہم ہندسہ کروی لکھتی ہیں جس میں بعض دعوی ضلع اور زاویوں کی باب میں ثابت کرینگے

(۲۵) قطبی مثلث - فرض کرو کہ Δ ب س مثلث کروی ہی اور نقاط Δ و ب و س قطب قوسوں ب س اور س Δ اور Δ ب کی موافق اپنی اپنی نظیر کے اور ان کی اسی جانب میں واقع ہیں جس جانب میں زاویہ Δ اور ب اور س واقع ہیں تو مثلث Δ ب س کو قطبی مثلث Δ ب س کا کہینگے



چونکہ مثلث کروی کے ہر ضلع کی دو قطب ہو سکتی ہیں اسلئے آٹھ مثلث قطبی ایسی ایک مثلث کی بن سکتی ہیں کہ جنکی راس زاویوں کی قطب مثلث معلوم کی ہوں لیکن صرف اسے مثلث کہیں قطب Δ اور ب اور س اسی جانب میں آتے ہیں جس جانب میں کہ Δ اور ب اور س واقع ہوئی ہیں قطبی مثلث کہتے ہیں

مثلث Δ ب س کو مثلث اولیٰ یا اصلی بہ لحاظ مثلث Δ ب س کے کہتے ہیں
(۲۶) اگر ایک مثلث قطبی مثلث دوسرے مثلث کا ہو تو دوسرا مثلث قطبی مثلث پہلی مثلث کا ہوگا
فرض کرو کہ مثلث Δ ب س کا قطبی مثلث Δ ب س ہی تو مثلث Δ ب س قطبی مثلث Δ ب س کا ہوگا



دلیل چونکہ ب قطب Δ س کا ہی اسلئے بحکم (۱۰ دفعہ) کی قوس Δ ب رجبہ دائرہ ہے اور چونکہ س قطب Δ کا ہی اسلئے قوس Δ س رجبہ دائرہ ہی - اسلئے وسطی بحکم (۱۱ دفعہ) Δ ب س کا ہی - اور نیز Δ اور Δ ایک ہی جانب میں ضلع ب س کی واقع ہیں کیونکہ بموجب فرض کی Δ اور Δ ایک ہی جانب میں ب س کی واقع ہیں - اسلئے Δ و ب نسبت رجبہ دائرہ کی ہی اور چونکہ Δ ب س کا ہی اور Δ رجبہ دائرہ سی کم ہی تو Δ اور Δ ایک ہی

جانب میں ضلع ب س کے واقع ہیں
 علیٰ ہذا القیاس سطح ثابت ہو سکتا ہے کہ قطب س کا ہی اور ب اور ب ایک ہی جانب میں
 ضلع س کے واقع ہیں اور نیز قطب ب کا ہی اور س اور س ایک ہی جانب میں ب کے
 کے واقع ہیں پس اب س قطبی مثلث ب س کا ہوا
 (۲۷) مثلث قطبی کے ضلعی اور زاویہ صلی مثلث کی ضلعی اور زاویوں کی موافق اپنی اپنی نظیر کے
 تکملے ہوتے ہیں

اس واسطی کہ فرض کرو کہ قوس ب س قوسوں ب اور اس ہی نقاط داوری پر ملتی ہے اگر
 القطع کی لمبی ضرورت پڑی تو ان قوسوں کو خارج بھی کرو۔ چونکہ آقطب ب س کا ہی تو کروی
 زاویہ کا مقیاس بجگ (۱۲ دفعہ) کے قوس دی کا ہی۔ لیکن ب می اور س دین سی ہر یک
 ربعہ دائرہ ہے۔ اس واسطی دی اور ب س ملکہ برابر نصف دائرہ کی ہیں یعنی زاویہ جو محاذی
 ب س کے مرکز پر واقع ہے تکملہ زاویہ کا ہی۔ اس مطلب کو مختصر طور پر اس طرح بیان کیا کرتے
 ہیں کہ ب س تکملہ کا ہی۔ علیٰ ہذا القیاس ثابت ہو سکتا ہے کہ س کے تکملہ کا اور ب ب
 تکملہ س کا ہے

اور چونکہ مثلث ب س قطبی مثلث ب س کا ہی اس واسطی اسی نتیجہ نکلتا ہے کہ ب س
 اور س اور ب تکملی موافق اپنی اپنی نظیر کی اور ب اور س کی یعنی ب اور ب اور س دین
 موافق اپنی اپنی نظیر کے ب س اور س اور ب کے ہیں
 انہیں خاصیتوں کی سبب سے اصلی مثلث اور قطبی مثلث کو لمحاظ ایک دوسرے کی مثلث تکملی کہتے ہیں
 پس اگر مثلث کروی کی زاویوں کو ب و س اور ضلع کو ط و طب و طس تعبیر کریں
 اور مقیاس قوسی کی موافق بیان کریں اور مثلث قطبی کی زاویوں اور ضلع کو ب و ب و ب
 و س اور ط و طب و طس سے تعبیر کریں تو یہ نتائج ہم کو حاصل ہوں گے
 ب = کہ - ط و ب = کہ - طب و س = کہ - طس

طا = کہ - ۱ و طب = کہ - ۲ با وطن = کہ - ۳

(۲۸) نتائج مذکورہ بالا ثابت کام کی ہیں پہلی کہ اگر کوئی دعویٰ بالعموم مثلت کروسی کے باب میں ثابت کیا جائے تو وہ مثلت قطبی پر جاوی ہوگا فقط اس دعویٰ عامہ میں اونی زاویوں کی جگہ اوکلی مکلی اضلاع کی اور ضلاع کی جگہ اوکلی مکلی زاویوں کے موافق اپنی اپنی نظیر کے تبدیل کر دینے کی اس اصول کی باب ایندہ میں مثالیں لکھینگے

بدیل کر دیسی اس سوال کی باب ابدہ بن متالین لکھنے
(۲۹) ہر مثلث کروی کی کوئی سی دو ضلع ملکر تیسری ضلع سے بڑی ہوئی ہیں شکل دفعہ ماٹو
اسوٹا کہ حکم (۲۰ شام اقلیدس) کی زاویہ مجسمہ کی کوئی سی دو سطح زاویہ ملکر بڑے
تیسرے زاویہ سی ہوتی ہیں۔ اسوٹا کی کوئی سی دو تو میں اب وبس دس زمین سے
ملکر بڑے تیسرے قوس سے ہوئی

اسی ہیہ ہی مستبط ہوتا ہی کہ مثلث کروئی کا کوئی ساضلع دو ضلعوں کی تفاوت سے بڑا ہوتا ہے
(۳) مثلث کروئی کی تینوں ضلعوں کا مجموعہ نسبت محیط دائرہ عظیم کے چھوٹا ہوتا ہے
دیکھو (شکل دفعہ ۱۸)

اسو اسطی کہ حکم (۲۱ ش ۱۱ م اقلیدس) کی زاویہ مجسمہ کے تینوں مسطح زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے بھڑتا ہوتا ہے اسبوط

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

ایسیطے اب + بس + س + س + کم بہ نسبت ۲ کہ x س + کی ہے

یعنی مجموعہ قوسوں کا محیط دائرہ عظیم سے کم ہے

(۳۱) دعویٰ جواہر دو ضعون میں ثابت ہوئی ہیں انکی توسیع ہو سکتی ہے اس طرح سے کہ اگر کوئی کثیر الاضلاع ہو جسکا ہر ایک زاویہ دو قائمہوں سی کم ہو تو ہر ایک ضلع باقی اضلاع کے مجموعہ سی کم ہوگا۔ یہیہ امر دفعہ ۲۴ کے مکرر حکم لگانی سے ثابت ہو جائیگا

مثلاً فرض کرو کہ شکل چار ضلعی کہنی اور ان کی زرا دیوں کی نقاط A و B و C و D ہیں تو

ا ب + ب س بڑی اس سے ہیں

اسیوٹے ا ب + ب س + س د بڑی اس + س سے ہیں اسلئے

بدرجہ او کے بڑے اس سے ہونگے

پہرا اگر کثیر الاضلاع ایسی ہو کہ ہر ایک زاویہ اس کا دو قائمون سی کم ہو تو تمام ضلعی اسکی ملکر دائرہ عظیم کے محیط سی کم ہونگی۔ یہ بات اویسطر جسطر دفعہ ۳۰ میں ثابت ہوئی (۲۱ شام فلکیس) سے ثابت ہے

(۳۲) مثلث کروی کی تینوں زاوئی ملکر دو قائمون سی بڑی اور چھ قائمون سی چھوٹی ہوتی ہیں

فرض کرو کہ ا ب و س مثلث کروی کی زاوئی ہیں اور ط ا و ط ب و ط س اضلاع قطبی کے

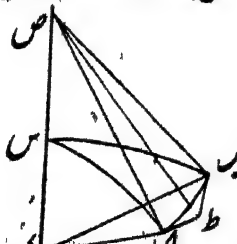
تو بموجب دفعہ ۳۰ کے ط ا + ط ب + ط س چھوٹے بہ نسبت ۲ ک کے ہیں

یعنی ک - ۱ + ک - ب + ک - س کم بہ نسبت ۲ ک کے ہیں

اسیوٹے ۱ + ب + س بڑی بہ نسبت ک کے ہیں

چونکہ روایا ا ب و س میں سے کسی کم بہ نسبت ک کی ہے تو مجموعہ ۱ + ب + س کم بہ نسبت ک کے ہو

(۳۳) مثلث کروی متساوی اساقین کے زاوئی فوق القاعدہ کی اسپہیں برابر ہیں



فرض کرو کہ ا ب س مثلث کروی متساوی ہیں اس لیے ب س اور س مرکز کردہ کا ہے

قوسوں اس اور ب س کے تماس نقاط اور ب پر کھینچو تو س محدودہ سی ایک ہی نقطہ

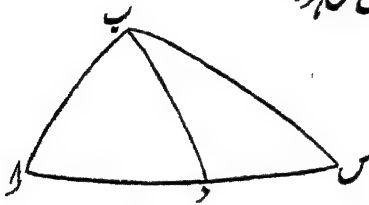
ص پر ملینگے اور اس برابر ب ص کے ہوگا

ماس ا ط اور ب ط نقاط اور ب پر قوس ا ب کے کھینچو تو ا ط = ب ط ملاؤ ط ص تو

دو مثلثوں ص ا ط اور ص ب ط میں اضلاع ص ا اور ص ب اور ط ص برابر ہیں ص ب

و ب ط و ط ص کے موافق اپنی اپنی نظیر کے — اسے چوتھے زاویہ ص ا ط برابر ہی زاویہ ص ب ط کے اور یہی زاویہ فوق القاعدہ کے مثلث کروی کے ہیں

شکل میں یہ خیال کر لیا ہی کہ اس اور ب س رابعہ دائرہ سی کم ہیں اگر وہ رابعہ دائرہ سے بڑی ہوں تو ماس اس اور ب س کی س و خارج شدہ سی بجائے کی طرف خارج ہونی کی و کی طرف خارج ہونی ہی ملینگے اور اثبات وہی رہی گا جو اوپر بیان ہوا — اگر اس اور ب س رابعہ دائرہ میں تو بموجب دفعات ۱۱ اور ۱۲ کی فوق القاعدہ کے زاویہ قائمہ ہونگے (۳۴) اگر مثلث کروی کی دو زاویہ اسپین برابر ہوں تو ان کی مقابل کی ضلعی بھی اسپین برابر ہونگے چونکہ مثلث اولی کی دو زاویہ برابر ہیں تو مثلث قطبی کی دو ضلعی اسپین برابر ہونگی اس لیے قطبی مثلث میں بموجب دفعہ ۳۳ کے برابر ضلعوں کے مقابل کی زاویہ اسپین برابر ہونگی اسی ثابت ہوا کہ مثلث اولی میں اضلاع برابر زاویوں کے مقابل کی اسپین برابر ہونگے (۳۵) اگر مثلث کروی میں ایک ضلع بڑا بہ نسبت دوسرے ضلع کی ہو تو بڑی زاویہ کی سامتی کا ضلع بڑا چھوٹے زاویہ کے سامتی کی ضلع سی ہوگا

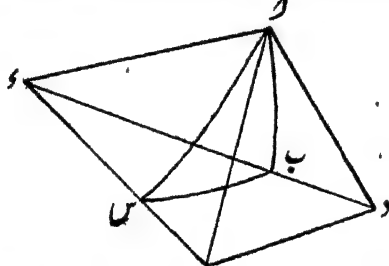


فرض کرو کہ اب س مثلث کروی اور زاویہ اب س بڑا بہ نسبت زاویہ ب ا س کی ہی تو ضلع اس بڑا بہ نسبت ضلع ب س کی ہوگا ب پر زاویہ اب د برابر زاویہ ب ا د کے بناؤ تو بموجب دفعہ ۳۴ کے ب د برابر ہی ا د کے اور بموجب دفعہ ۲۹ کی ب د + د س بڑی ہیں بہ نسبت ب س کے اس لیے ا د + د س بڑی بہ نسبت ب س کی ہیں یعنی اس بڑا بہ نسبت ہے (۳۶) اگر مثلث کروی کا ایک ضلع بڑا بہ نسبت دوسرے ضلع کی ہو تو زاویہ بڑی ضلع کے سامتی کا بڑا چھوٹے ضلع کے سامتی کی زاویہ سے ہوگا

بوساطت قطبی مثلث کے دعوی ثابت کرو
یا اسطرح سی ثابت کرو کہ اس بہ نسبت ب س کی بڑا فرض کرو زاویہ اب س بڑا نسبت
ب اس کے ہوگا اسواسطی کہ زاویہ اب س چھوٹا نسبت زاویہ ب اس کے بموجب دفعہ
کے نہیں ہو سکتا اور زاویہ اب س برابر زاویہ ب اس کے بموجب دفعہ ۳۴ کی نہیں ہو سکتا
اسواسطی زاویہ اب س بڑا بہ نسبت زاویہ ب اس کے ہے

باب چہارم

مثلث کروی کے اضلاع اور زاویوں کے علم مثلثی جمعی
(۳۷) مثلث کی ایک زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی جیب اور جیب التمام کی قیون میں



فرض کرو کہ اب س مثلث کروی ہی اور مرکز کو کا ہی قوس اس کا مماس نقطہ سے
نکالا گیا فرض کرو د س ممدودہ سی نقطہ سی پر ملتا ہی اور قوس اب کا مماس نقطہ ل س
نکالا گیا ب ممدودہ سی نقطہ د پر ملتا ہی ملاؤ سی د پس زاویہ ی ا د ایک زاویہ مثلث کروی
کا ہی اور زاویہ ی د س مقیاس ضلع کا ہی مثلثات ل د سی اور د سی سی ہم کو بہر حال

$$د ی = د ا + ا ی - ا د - د ا ی ج م$$

$$د ی = د ا + ا ی - د د - د ی ج م$$

اور زاویہ ی د د اور د ا ی قائمی ہیں تو

$$د د = د ا + ا د اور د ی = د ا + ا ی$$

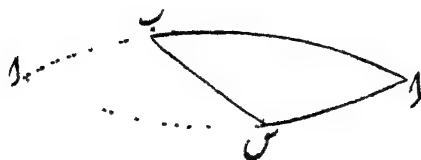
پس تفریق کرنے سے بہر حال ہوگا کہ

مشکل کروئی اضلاع اور زاویوں کی عام مسئلہ چھپا

۱۴

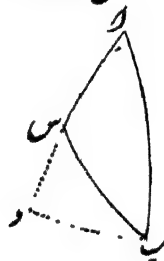
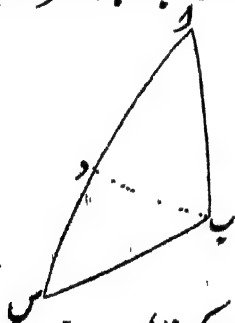
باہریم

ا ب اور ا س کو خارج کر کے نقطہ ا پر طاؤ اور ا ب = طس اور ا س = طب
تو موافق سابق کے مثلث ا ب س میں



جم طا = جم طب + جم طس + جب طب جب طس جم ا
لیکن طب = کہ - طب اور طس = کہ - طس اور ا = ا پس

جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا
(۳) فرض کرو کہ زاویہ ا کے اضلاع میں ہی ایک ضلع مثلاً ا ب ربعہ دائرہ ہے



ا س پر یا ا س محدود پیشتر ضرورت آدہ برابر ربعہ دائرہ کے بناؤ
اور ب د کہنچو۔ اگر ب در ربعہ دائرہ ہی تو بحکم (۱۱ دفعہ) کے ب قطب ا س کا ہے

اس صورت میں جم طا = کہ اور ا = کہ اور ایسی ہی طس = کہ
پس صورت قانونی جو اوپر ثابت ہوئی تھی وہ مستطابق بن جاتی ہے یعنی ۰ = ۰

اگر ب در ربعہ دائرہ نہ ہو تو مثلث ب د س سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم طا = جم س د جم ب د + جب س د جب ب د جم س ب د

اور جم س ب د = ۰ اور جم س = جم (کہ سمہ طب) = جب طب

اور جم ب د = جم ا پس جم طا = جب طب جم ا

اور یہ وہی صورت قانونی دفعہ ۳۳ کی ہے جو قسٹ طس = ۳

(۴) فرض کرو کہ زاویہ ایک دونوں ضلعوں میں سے ہر ایک زاویہ دائرہ ہے

تو صورت قانونی یہ ہو جائیگی جم ط = جم ۱ اور یہ امر بدیہی ہی ہو اسطی کہ قطب ب س کا ہے اور اسطرح ۱ = ط

پس ثابت ہوا کہ صورت قانونی دفعہ ۳۳ کے سب ضلعوں میں ثابت ہے

(۳۹) صورت قانونی دفعہ ۳۳ سی مثلث کی ہر زاویہ کی خیب النام اضلاع کی جیبوں اور جیب التمام

میں بیان ہو سکتی ہے پس یہ تین صورت قانونیہ ہم کو حاصل ہوئیں

$$\text{جم ط} = \text{جم ط جب طس} + \text{جب ط جب طس جم ۱}$$

$$\text{جم ط جب} = \text{جم طس جم ط} + \text{جب طس جب ط جم ب}$$

$$\text{جم طس} = \text{جم ط جب طس} + \text{جب ط جب طس جم س}$$

یہ مساواتیں علم مثلث کرومی میں اصل اصول ہیں انسی بہت سی صورت قانونیہ مستنبط ہو سکتی ہیں

(۴۰) مثلث کرومی کی ایک زاویہ کی خیب کو اضلاع کی قسٹوں میں بیان کرو

$$\text{ہم کو معلوم ہی کہ جم ۱} = \frac{\text{جم ط} - \text{جم ط جب طس}}{\text{جب ط جب طس}}$$

$$\text{اسیو ط جب ۱} = ۱ - \frac{\text{جم ط} - \text{جم ط جب طس}}{\text{جب ط جب طس}}$$

$$= \frac{(۱ - \text{جم ط جب}) - (۱ - \text{جم طس})}{\text{جب ط جب طس}}$$

$$\text{جب ط جب طس}$$

$$= \frac{۱ - \text{جم ط} - \text{جم طس} + \text{جم ط جب طس}}{\text{جب ط جب طس}}$$

$$\text{جب ط جب طس}$$

$$\text{اسیو ط جب ۱} = \frac{(۱ - \text{جم ط} - \text{جم طس} + \text{جم ط جب طس})}{\text{جب ط جب طس}}$$

$$\text{جب ط جب طس}$$

مثبت کرو کی اضلاع اور زاویوں کے علامتی جملے

۱۸

یا جیلم

علامت جملہ کی مثبت یعنی جیلمی کہ جب ط و جب ط و جب ا و س مثبت ہیں
(۴۱) جب ا کی قیمت دریافت ہونی ہی دفعہ گذشتہ میں یہ مستط ہوتا ہے کہ

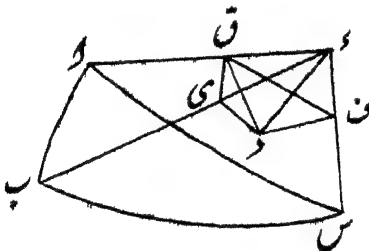
$$\text{جب ا} = \text{جب ب} = \text{جب س}$$

اسو اسطی کہ صراحتاً اوغین کا اس جملہ کے برابر ہے

$$(۱ - \text{جم}^۲ \text{طا} - \text{جم}^۲ \text{ط} - \text{جم}^۲ \text{طس} + \text{جم}^۲ \text{طاج} \text{ط} \text{جم} \text{طس})$$

جب طاج ط جب طس

پس اسی ثابت ہوا کہ مثبت کرو کی اضلاع کی جو ب متناسب و انکی مقابل کی زاویوں کے
جیبوں کے ہوتی ہیں۔ دفعہ اندہ میں اوسکا ثبوت اور طرح سی لکھتی ہیں جس میں کچھ تعلق



اوسکو دفعہ بالا سے نہیں رہتا

فرض کرو کہ ا ب س مثبت کرو کی ہو

اور مرکزہ کا ہی۔ اور نقطہ ق مقرر کرو

اور ق د عمود سطح مستوی ب و س پر نکالو

اور نقطہ دی دئی اور ق د عمود ب و س پر نکالو

ملاؤ ق ی و ق ی و و د

چونکہ ق د عمود سطح ب و س پر ہی تو وہ ہر خط مستقیم پر زاوی قائی بنایا جاوے اوس سطح میں نظر

پس سی ثابت ہوا کہ ق ی = ق د + دی = ق د + دی = ق د - دی

پس ق ی و قائمہ ہی اسیو اسطی ق ی = بوق جب ق ی = وق جب طس

اور ق د = ق ی جب ق ی د = ق ی جب ب = وق جب طس جب ب

اور علی ہذا القیاس ق د = وق جب ط ب جب س اسیو اسطی

وق جب طس جب ب = وق جب ط ب جب س

اسیو اسطی جب س = جب ط

شکل میں یہ فرض کر لیا ہی کہ طب اور طس اور ب اور س میں ہی ہر ایک قائمہ سی کم ہی امتحان کرنی ہی یہ بات ثابت ہوئی کہ دعویٰ صبر تون میں ثابت ہی فقط شکل کچھ بدل کر نیکی اور ثبوت سب صورتوں میں ایک ہی — دلیل شدہ ب فقط ایک قائمہ سے بڑا ہو تو نقطہ ۵ بجای ب اور دس کے درمیان واقع ہونی کی اجازت کی واقع ہوگا تو فی ہی دیکھ ب کا ہی اسلئے جب ق می دکی برابر جب ب کے ہے

(۴۳) مم طاجب طب = مم ا جب س + جم طب جم س کی ثابت کرنی کی لئی ہم کو معلوم ہی کہ

$$\begin{aligned} \text{جم طا} &= \text{جم طب جم طس} + \text{جب طب جب طس جم ا} \\ \text{جم طس} &= \text{جم طا جم طب} + \text{جب طاجب طب جم س} \\ \text{جب طس} &= \text{جب طاجب س} \end{aligned}$$

جم طس اور جب طس کی قیمتیں مساوات اول میں اسطرح سی رکھ لو کہ
جم طا = (جم طا جم طب + جب طاجب طب جب طس) جم طس + جب طاجب جم ا جب س
جبر و مقابلہ سے

$$\begin{aligned} \text{جم طاجب طب} &= \text{جب طاجب طب جم طس} + \text{جب طاجب طب مم ا جب س} \\ \text{جب طاجب طب} &= \text{پر تقسیم کرو تو} \end{aligned}$$

مم طاجب طب = جم طب جم س + مم ا جب س
(۴۴) اگر حروف کو بدلیں تو اسی طرح کی بانچ اور صورتانوی حاصل ہوگیں غرض ایک یہ اور بانچ اور سب چہ ملکہ یہ صورتانوی ہوگیں

$$\begin{aligned} \text{جم طاجب طب} &= \text{جم ا جب س} + \text{جم طب جم س} \\ \text{مم طاجب طا} &= \text{مم ب جب س} + \text{جم طا جم س} \\ \text{مم طاجب طس} &= \text{مم ب جب ا} + \text{جم طس جم ا} \\ \text{مم طس جب ط} &= \text{مم س جب ا} + \text{جم طس جم ا} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{مم طس جب طا} = \text{مم س جب ب} + \text{جم طا جم ب} \\
 & \text{مم طا جب طس} = \text{مم ا جب ب} + \text{جم طس جم ب} \\
 & (۷۵) \text{ مثلث کی نصف زاویہ کی جیب جیب التمام اور مماس کو ضلع کی جملوں میں بیان کرو} \\
 & \text{بموجب دفعہ ۲۳ جم ۱} = \text{جم طا} - \text{جم طب} - \text{جم طس} \\
 & \text{اسیو اسٹی} \quad \text{جم ۱} = \text{جم طا} - \text{جم طب} - \text{جم طس} = \text{جم (طس - طب) - جم طا} \\
 & \text{اسیو اسٹی جب ۱} = \text{جب ۱} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب} - \text{طس}) \text{ جب ۱} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب} + \text{طس}) \\
 & \text{فرض کرو کہ } ۲ = \text{طا} + \text{طب} + \text{طس} \text{ تو م نصف مجموعہ ضلع مثلث کا ہوگا پس} \\
 & \text{طا} + \text{طب} - \text{طس} = ۲ - \text{م} \quad ۲ = \text{طس} - \text{م} \quad (۲ - \text{طس}) \\
 & \text{طا} + \text{طب} + \text{طس} = ۲ - \text{م} \quad ۲ = \text{طب} - \text{م} \quad (۲ - \text{طب}) \\
 & \text{پس جب ۱} \frac{1}{2} = \text{جب (م - طب) جب (م - طس)} \\
 & \text{اور جب ۱} \frac{1}{2} = \frac{\text{جب (م - طب) جب (م - طس)}}{\text{جب طب جب طس}} \\
 & \text{اور نیزاً جم ۱} = \text{جم طا} - \text{جم طب} - \text{جم طس} = \text{جم طا} - \text{جم (طس + طب)} \\
 & \text{اسیو اسٹی} \quad \text{جم ۱} \frac{1}{2} = \text{جب ۱} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب} + \text{طس}) \text{ جب ۱} \frac{1}{2} (\text{طب} + \text{طس} - \text{طا}) \\
 & \text{اور جم ۱} \frac{1}{2} = \frac{\text{جب (م - طب) جب (م - طس)}}{\text{جب طب جب طس}} \\
 & \text{جب ۱} \frac{1}{2} \text{ اور جم ۱} \frac{1}{2} \text{ کی صورتوں سے ہم یہ مستطی کرتے ہیں کہ} \\
 & \text{مس ۱} \frac{1}{2} = \frac{\text{جب (م - طب) جب (م - طس)}}{\text{جب (جب (م - طس) جب (م - طب))}}
 \end{aligned}$$

شملت کرو یا ضلع اور زاویوں کو علم حاصل کرو

جذر کی علامت مثبت سب جگہ ہوگی اسلیٰ کہ $\frac{1}{2}$ کم فائدہ سی ہی اسلیٰ اوسکی جیب جیب تمام اور محاسن سب مثبت ہونگے

(۴۶) چونکہ جب ۱ = ۲ جب $\frac{1}{2}$ جم $\frac{1}{2}$ نو اسی ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

جب ۱ = جیب طیب جیب طس (جب م جب م - ط) جب (م - ط) جب (م - طس)

یہ تہ ملے اور وہ جملہ جو دفعہ ۴۰ میں جب ۱ کی بیان کرنے کی لئی دیا گیا آپس میں مطابق ہیں اگر نسب نما کو اجزاء ضربی میں اوسط لکھیں جس طرح علم شملت مستوی کی دفعہ ۱۵ میں لکھا ہی آسانی کی لئی ہم جذر کی جگہ ایک رمز جیب ۱ کی قیمت میں کام میں لاتے ہیں ہم اوسکون سے تعبیر کرتے ہیں تو

ن = جب م جب (م - ط) جب (م - ط) جب (م - طس)

اور ۱۸ = ۱ - جم ط - جم ط - جم طس + جم ط طیب جم طس

(۴۷) ایک شملت کی ایک ضلع کی جیب تمام کو ضلع اور زاویوں کی جیب تماموں میں سے ایک دفعہ ۳ کی صورت میں جو جب دفعہ ۲۸ کی ضلع کی جگہ مکملے او کی زاویوں کی اور زاویہ کے جگہ اوسکا مکملہ ضلع کا اسطح بدل دیں کہ

جم (ک - ۱) = جم (ک - ب) جم (ک - س) + جب (ک - ب) جب (ک - س) جم (ک - ط)

یعنی جم ۱ = جم ب جم س + جب ب جب س جم ط اور علیٰ ہذا لھتاس

جب = جم س جم ۱ + جب ۱ جب س جم ط

جم س = جم ۱ جم ب + جب ۱ جب ب جم طس

(۴۸) دفعہ ۴۸ کی صورت میں اگر زاویوں کی جگہ او کی تکلیی اضلاع کی اور ضلع کی جگہ او کی تکلیی

زاویوں کی بدل دیں تو یہ دریافت ہوگا کہ کچھ صورت اور نہیں پیدا ہونگی بلکہ وہی صورت دوبارہ حاصل ہونگی اس خیال سے وہ صورت قانونی ذہن میں جم سکتی ہیں اور آسانی سے یاد رکھ سکتے ہیں

(۴۹) ایک شملت کی نصف ضلع کی جیب و جیب تمام اور محاسن کو زاویوں کے جملوں میں بیان کرو

ثابت کرو کہ اضلاع اور زوایوں کے علامتی جملوں

$$\begin{aligned} \text{مجموعہ دفعہ ۴} \quad \text{جم طا} &= \text{جم ۱} + \text{جم ب} \cdot \text{جم س} \\ \text{اسیو اسٹ} \quad \text{جم طا} &= ۱ - \frac{\text{جم ۱} + \text{جم ب} \cdot \text{جم س}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} = \frac{\text{جم ۱} + \text{جم (ب+س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \\ \text{اسیو اسٹ} \quad \text{جب طا} &= \frac{\text{جم ۱} + \text{جم (ب+س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} = \frac{\text{جم ۱} + \text{جم (ب+س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{فرض کرو کہ } m &= ۱ + \text{ب} + \text{س} + \text{توب} + \text{س} - ۱ = ۲(۱-m) \quad \text{اسیو اسٹ} \\ \text{جب طا} &= \frac{\text{جم م} \cdot \text{جم (۱-m)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اور نیز } \text{جم طا} &= ۱ + \frac{\text{جم ۱} + \text{جم ب} \cdot \text{جم س}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} = \frac{\text{جم ۱} + \text{جم (ب-س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \\ \text{اسیو اسٹ} \quad \text{جم طا} &= \frac{\text{جم ۱} + \text{جم (ب+س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} = \frac{\text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \\ \text{اور جم طا} &= \frac{\text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-س)}}{\text{جب ب} \cdot \text{جب س}} \end{aligned}$$

$$\text{اسی ثابت ہوا کہ } \frac{\text{جب م} \cdot \text{جب (۱-m)}}{\text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-س)}} = ۱$$

جزیر علامت مثبت چاہیے اسلیٰ کہ طے قائمہ سے چھوٹا ہے
 (۵) دفعہ بالا میں جو جملہ لکھی ہیں وہ دفعہ ۴ کی جملوں سے مجموعہ دفعہ ۴ کی مستنبط ہو سکتی ہیں
 قیمتیں جب طے و جم طے و س طے کی اصلی ہیں۔ اسیو اسٹ کی کم ایک قائمہ سی طے اور س
 قائمہ سی چھوٹا مجموعہ دفعہ ۴ کی ہی اسیو اسٹ جب م منفی ہی اور مثبت قطبی میں ہر ایک
 ضلع کم بہ نسبت مجموعہ باقی اضلاع کی ہوتا ہے تو کم۔ اور کم بہ نسبت کم۔ ب۔ کم۔ س۔ ہے
 اسیو اسٹ ب + س۔ کم کم کے لئے ہے اسیو اسٹ م۔ کم کم کے لئے ہی اور ب + س۔

رشتہ کر کے ضلوع اور زاویوں کے مثلثی جملوں

جبر مقابله میں بڑا۔ ک سی ہی م۔ اور جبر مقابله میں بڑا۔ ک سی ہوا سیو بطی جم (م)۔ (۱)
 مثبت ہی اور علیٰ ذالقیاس جم (م)۔ (ب) اور جم (م)۔ (س) مثبت ہیں۔ اسی ثابت ہوا کہ
 جب $\frac{1}{2}$ و جم $\frac{1}{2}$ و س $\frac{1}{2}$ کی قیمتیں اصلی ہیں
 (۵۱) چونکہ جب طا = ۲ جب طا جم طا تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

جب طا = ۲ جب ب جب س { - جم جم (م)۔ (۱) جم (م)۔ (ب) جم (م)۔ (س) }
 ہم بجای { - جم جم (م)۔ (۱) جم (م)۔ (ب) جم (م)۔ (س) } کے ن استعمال میں لاتے ہیں
 (۵۲) مثالوں نیچری ثابت کرو

$$\frac{\text{جب طا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{م}} = \text{م کے فرض کرو}$$

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{\text{جب طا} + \text{جب ب}}{\text{جب طا} + \text{جب ب}} = \text{م کی جو جب مسئلہ جبر کی}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{جب طا} - \text{جب ب}}{\text{جب طا} - \text{جب ب}} = \text{م اور نیز م}$$

$$\text{اب جم ۱} + \text{جم ب} = \text{جم س} = \text{جب ب} + \text{جب س} = \text{جم طا} = \text{م جب س} + \text{جب ب} + \text{جم طا}$$

$$\text{اور جم ب} + \text{جم ۱} + \text{جم س} = \text{جب ۱} + \text{جب س} = \text{جم طا} = \text{م جب س} + \text{جب ب} + \text{جم طا}$$

$$\text{اسیو سے جمع کرنی سی (جم ۱ + جم ب) (۱ + جم س) = م جب س جب (طا + طب) (۳) \dots\dots\dots}$$

اسیو سے جو جب (۱) کے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جب ۱} + \text{جب ب}}{\text{جم ۱} + \text{جم ب}} = \frac{\text{جب طا} + \text{جب طب}}{\text{جب س} + ۱ + \text{جم س}}$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{\text{جم ۱} + \text{جم ب}}{\text{جم ۱} + \text{جم ب}} = \frac{\text{جم ۱} + \text{جم ب}}{\text{جم ۱} + \text{جم ب}} = \text{م س}$$

اور علیٰ ذالقیاس (۳) اور (۲) سی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جم ۱} - \text{جم ب}}{\text{جم ۱} + \text{جم ب}} = \frac{\text{جب طا} - \text{جب طب}}{\text{جب س} + ۱ + \text{جم س}}$$

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{\text{جم ۱} - \text{جم ب}}{\text{جم ۱} - \text{جم ب}} = \frac{\text{جم ۱} - \text{جم ب}}{\text{جم ۱} - \text{جم ب}} = \text{م س}$$

مثلت کروئی ضلع اور زاویوں کے علامتی جملے

۲۴

باب چہارم

(۴) اور (۵) میں ک۔ اور بجای طا وغیرہ کے لکھو تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) = \text{جم} \frac{1}{2} \frac{(1-ب)}{(1+ب)} \text{مس} \frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\text{مس} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) = \text{جب} \frac{1}{2} \frac{(1-ب)}{(1+ب)} \text{مس} \frac{1}{2} \quad (۵)$$

صور (۴) (۵) (۶) (۷) متناسبہ متماثل صورت میں لکھی جاسکتی ہیں اور انکو نیز صاف سے ایجاد کیا اسلئے انکا نام متماثلات نیری ہی۔ آخر دو صورتیں تعبیر مثلث قطبی کی استغاثات کے ثابت ہو سکتی ہیں اگر دفعہ ۳۴ کے صوری انکا استنباط کریں

(۵۳) مساوت (۴) میں جم $\frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب})$ اور جم $\frac{1}{2}$ ضرور باشت مقادیر ہیں ثابت ہوتا ہے کہ مس $\frac{1}{2} (1+ب)$ اور جم $\frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب})$ کی ایک ہی علامتیں ہیں اس طرح سی کہ $\frac{1}{2} (1+ب)$ اور $\frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب})$ کیا تو دونوں میں سی ہر ایک قائمہ سی کم ہی یا ہر ایک قائمہ سی بڑا ہے اور اس مطلب کو ہم اس طرح ادا کیا کرتی ہیں کہ $\frac{1}{2} (1+ب)$ اور $\frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب})$ ہم صفت ہیں

(۵۴) مسائل گاس حساب کے ثابت کرو

ہم ثابت کرانی ہیں کہ جم طس = جم طاجب طب + جب طاجب طب جم س اسبواسطے

$$1 + \text{جم طس} = 1 + \text{جم طاجب طب} + \text{جب طاجب طب} (\text{جم} \frac{1}{2} \text{س} - \text{جب} \frac{1}{2} \text{س})$$

$$= 1 + \text{جم} (\text{طا} - \text{طب}) (\text{جم} \frac{1}{2} \text{س}) + 1 + \text{جم} (\text{طا} + \text{طب}) (\text{جب} \frac{1}{2} \text{س})$$

$$\text{اسبواسطے جم} \frac{1}{2} \text{طس} = \text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) (\text{جم} \frac{1}{2} \text{س}) + \text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) (\text{جب} \frac{1}{2} \text{س})$$

$$\text{علیٰ بنہ القیاس جب} \frac{1}{2} \text{طس} = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) (\text{جم} \frac{1}{2} \text{س}) + \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) (\text{جب} \frac{1}{2} \text{س})$$

اب نیز حساب کی اول دو مماثلات کر کر کے مجزوریہ واحد زیادہ کرو تو اوں سے جو باقی ثابت ہو میں میں نیز مجزوریہ

$$\text{قط} \frac{1}{2} (1+ب) = \text{جم} \frac{1}{2} \text{طس} = \text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) (\text{جب} \frac{1}{2} \text{س}) \quad (۱)$$

$$\text{قط} \frac{1}{2} (1-ب) = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) (\text{جم} \frac{1}{2} \text{س}) \quad (۲)$$

مثلت کروئی کے ضلع اور زاویوں کے مثلث جملہ

جذرین لکھو تو اس سے پہلے کہ $\frac{1}{2}(a+b)$ اور $\frac{1}{2}(a+b)$ ہم صفت میں آسکیں ہم کو یہ حال ہوگا کہ

$$\text{جم } \frac{1}{2}(a+b) = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{جم } \frac{1}{2} (a+b) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ س} \dots (1)$$

$$\text{جم } \frac{1}{2}(a-b) = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{جم } \frac{1}{2} (a+b) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ س} \dots (2)$$

ان نتائج کو اول دو مثالوں میں ضرب دو تو پہلے نتائج مستطی ہو سگے

$$\text{جب } \frac{1}{2}(a+b) = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{جم } \frac{1}{2} (a-b) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ س} \dots (3)$$

$$\text{جب } \frac{1}{2}(a-b) = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{جم } \frac{1}{2} (a+b) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ س} \dots (4)$$

ان چار آخر کی صورتوں کو گاس حساب کی مسائل کہتی ہیں اگرچہ حقیقت میں وہ ڈیڑھ حسابی ایجاد کی ہیں
افلوکھوا بطور لکھنا چاہئے

(۵۵) دفعہ ۲ میں مثلثات جو تکملی ایک دوسرے کی ہوں ان کی خواص علم ہندسہ سے ثابت کی گئی ہیں

اور ان خواص سے دفعہ ۴ کی صورت کو ثابت کیا ہی لیکن یہ صورت دفعہ ۳۴ سے ہی بغیر علم ہندسہ کی

مستطی ہو سکتی ہیں اسی معلوم ہوا کہ ساری مضامین کا مدار دفعہ ۳۴ پر ہے

اسو اسطی کہ دفعہ ۳۴ سے ہم کو جم ۱ درجم ب درجم س کی جملی دریافت ہو سکتی ہیں اور ان سے

ہم کو یہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\text{جم } 1 + \text{جم } 2 \text{ س} = (\text{جم } 1 - \text{جم } 2 \text{ طس}) + \text{جم } 1 \text{ طس} + (\text{جم } 2 - \text{جم } 1 \text{ طس}) + \text{جم } 2 \text{ طس}$$

اس کے کی شمار کنندہ میں ۱- جم ۲ طس بجائے جب ۱ طس کی لکھو تو وہ مختصر ہو کر یہ صورت پیدا کر لی کہ

$$\text{جم } 1 (1 - \text{جم } 2 \text{ طس} + \text{جم } 2 \text{ طس} - \text{جم } 1 \text{ طس} + \text{جم } 1 \text{ طس} + \text{جم } 2 \text{ طس} - \text{جم } 1 \text{ طس})$$

اور یہ ہو جو (۴۱) کے برابر ہی جم ۱ طس ب جم ۲ طس جب ۱ طس جب ۲ طس کے

$$\text{اسو اسطی جم } 1 + \text{جم } 2 \text{ س} = \text{جم } 1 \text{ طس} + \text{جم } 2 \text{ طس} + \text{جم } 1 \text{ طس} + \text{جم } 2 \text{ طس}$$

اسطی سے اور باقی دو صورت ثابت ہو سکتی ہیں

اسطی دفعہ ۴ کی صورت ثابت ہو گئیں اسو اسطی بغیر قطبی مثلثوں کے خواص اور وجود

مانتی کی ہم یہ مسئلہ مستطی کر سکتے ہیں کہ اگر ضلعی اور زاوی کی مثلث کروئی کے ان کے

اضلاع اور زاویوں کی تکملوں سے موافق اپنی اپنی نظیر کی بدل دی جائیں تو صورتوں کی دفعہ ۳۹ کی طرح اور ٹھیک رہے گی اور سواؤسی جو اور نتائج مستنبط ہونگے وہ صحیح ہونگے (۵۴) اس باب کی صورتوں سے بہت سی شکلیں بالمشکت کرومی کی باب میں ایسی ثابت ہو سکتی ہیں جو پہلی بالہندسہ ثابت ہو چکی ہیں یا ثابت ہو سکتی ہیں مثلاً دوسرے متشکلات میں سے

$$\text{مس} \frac{1}{2} (ا-ب) = \frac{1}{2} \text{جب} \frac{1}{2} (طا-طب) \text{م} \frac{1}{2} (طا+طب)$$

اسی ثابت ہونا ہی کہ $\frac{1}{2} (ا-ب)$ مثبت ہی اگر $\frac{1}{2} (طا-طب)$ مثبت ہی اور منفی ہے اگر $\frac{1}{2} (طا-طب)$ منفی ہی اور صفر ہی اگر $\frac{1}{2} (طا-طب)$ صفر ہی۔ پس سطح سداً نتائج جو دفعہ ۳۳ سی ۴ تک ثابت کئی تھی سب ثابت ہو گئی

(۵۷) اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کی دو ضلعی برابر ہوں دوسرے مثلث کی دو ضلعوں کو موافق اپنی اپنی نظیر کے اور زاویہ اوکی درمیانی ہی اسیں برابر ہوں تو اوکی اور زاویہ ہی موافق اپنی اپنی نظیر کے برابر ہونگے اور قاعدی ہی اوکی برابر ہونگی دفعہ ۳۴ کے اول صورت میں دو مثلثوں کی اندر طب و طس و لا کو ایک ہی مانکر نتیجی نکالیں تو ثابت ہوگا قاعدی اسیں برابر ہیں اور دو صورتوں کی دفعہ ۳۹ سی یہ ثابت ہوگا کہ اور س ایک ہی دو مثلثوں میں ہیں

اس بات کو بھی خیال کرنا چاہیے کہ یہاں مثلثوں کی کیفیت ایسی نہیں ہے کہ وہ تطبیق سے ایک دوسرے پر منطبق ضرور ہو جائیں ضلع ایک مثلث کی برابر دوسرے مثلث کی ضلعوں ہو سکتی ہیں لیکن موافق اپنی اپنی نظیر کے نہ ہوں بلکہ ان میں مساوت بہ ترتیب محکوم ہے جو کہ ان شکلوں میں کیفیت ہے



ہندسہ یا جبر کا کچھ علم چاہی۔

فرض کرو کہ اب س منشک کروئی ہی مرکز کردہ کاہی اور فرض کرو کہ د معین اور عہد کا
اصل ہی اور محور ط کا نقطہ س پر گذرنا ہی اور لا اور ب و ط نقطہ کی معین ہیں اور لا م
و د و ط ۲ نقطہ ب کی اور نق نصف قطر کردہ کاہی تو مربع خط مستقیم اب کا برابر ہے

$$(لا - لام) + (۲ - ۱) + (۲ - ۱) + (ط - ۱) + (ط - ۱)$$

اور نیز نق ۲ + نق ۲ - نق ۲ = نق ۲ جم اور ب کے
اور لا ۲ + د ۲ + ط ۲ = نق ۲ اور لا ۲ + د ۲ + ط ۲ = نق ۲ پس

$$لا، لام + د، د + ط، ط = نق ۲ جم اور ب$$

اب قائم الزاویہ مجدین سی قطبی مجدین کی طرف رجوع کریں تو

ط ۱ = نق جم بر ۱ ولا ۱ = نق جم بر ۱ جم بر ۱ اور ۱ = نق جم بر ۱ جب بر ۱
ط ۲ = نق جم بر ۲ ولا ۲ = نق جم بر ۲ جم بر ۲ = نق جم بر ۲ جب بر ۲
پس ہم کو یہ حاصل ہوتا ہی کہ

جم بر ۲ جم بر ۱ = جب بر ۱ جب بر ۲ جم (د - د) = جم اور ب
اب بموجب اصطلاحات علم منشک کروئی کے

جم طاجب طب جب طاجب طب جم س = جم طس

یہ ترکیب ثبات عامہ کی ہی اوسمیں جتنی مساواتیں کام میں آئیں ہیں وہ عموماً صحیح ہیں

امثلہ

(۱) اگر د = ط ثابت کرو کہ ب اور ط ابسین برابر ہیں یا تکملے ایک دوسرے کی ہیں اور
ایسی ہی کیفیت س اور طس کی ہے

(۲) اگر منشک کا ایکنا وید برابر باقی دھڑاویون کی مجموعہ کی ہو تو سب سی ٹیڑا ضلع دو چند
اوس بعد سے ہی جو اس کا نقطہ وسط مقابل کی زاویہ سے رکھتا ہے

(۳) مثلث قطبی مثلث اولیٰ پر کب منطبق ہوتا ہے

(۴) اگر نقطہ وسط Δ کا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم } \Delta \text{ س} = \text{جم } \Delta \text{ ب} \text{ س} = \text{جم } \Delta \text{ ب} \text{ ج} \text{ س} \text{ د}$$

(۵) اگر ایک مثلث کرومی کی دوزاوی برابر اپنی مقابل کی ضلعوں کی ہوں تو ثابت کرو

کہ باقی ضلع تکملہ باقی زاویہ کا ہوگا اگر مثلث میں دو ربعی اور دو قائمی ہیں تو باقی ضلع برابر باقی زاویہ کے ہوگا

(۶) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ Δ جم Δ ب Δ ج Δ س Δ = ۱

(۷) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ مس Δ ط Δ = ۱ - جم Δ س Δ ب Δ ج Δ س Δ متساوی الاضلاع

کی اضلاع اور زاویوں کی وہ حدیں دریافت کرو کہ جنکی درمیان وہ واقع ہوں

(۸) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ Δ ق Δ ط Δ = ۱ + Δ ق Δ ط Δ

(۹) اگر ایک مثلث کرومی کی تینوں ضلعی تنصیف کئی جائیں اور نیا مثلث بنی اور زاویہ درمیان

اضلاع جدید ط Δ اور ط Δ س Δ کی ہو تو جم Δ ب Δ ج Δ س Δ + مس Δ ط Δ س Δ ب Δ ج Δ س Δ = ۱

(۱۰) کرہ کی سطح مستدیر پر Δ اور س Δ دو ربعی ہیں اور نقطہ ی پر تقاطع کرتی ہیں اور انکی اطراف میں

دو دائرہ عظیم ط Δ ج Δ لگتی ہیں تو ثابت کرو کہ جم Δ س Δ = جم Δ ب Δ ج Δ س Δ = جم Δ ب Δ ج Δ س Δ

(۱۱) اگر ط Δ + ط Δ ب Δ = کہ تو ثابت کرو کہ جب Δ ب Δ + جب Δ س Δ = ۱

(۱۲) اگر دمی قوس دائرہ عظیم کی مثلث کرومی کی اضلاع Δ ب اور Δ س کی نقاط د اور ی تنصیف

کریں اور ق Δ قطب دی کا ہو اور ق Δ ب اور ق Δ س اور ق Δ ی اور ق Δ س دو دائرہ عظیم کی قوسوں کے وسطیٰ نقطہ

تو ثابت کرو کہ زاویہ ب ق س = دو چند زاویہ د ق ی

(۱۳) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \Delta \text{ ب } \Delta \text{ ط } \Delta + \text{جم } \Delta \text{ ب } \Delta \text{ ط } \Delta = \text{جب } \Delta \text{ ب } \Delta \text{ س } - \text{جم } \Delta \text{ ب } \Delta \text{ ج } \Delta \text{ س}$$

(۱۴) اگر مثلث کی ضلع ب س میں نقطہ د ہو تو ثابت کرو کہ

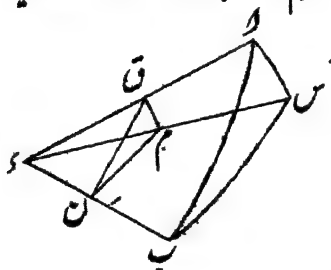
منشک کروئی کے ضلع اور زاویوں کے منحنی جملہ

۳۱

باب چہارم

جب ہم اکی لکھینگے تو یہ بات خود بخود ظاہر ہو جائیگی کہ تین اجزاء ترکیبی کی معلوم ہونی سے باقی تین اجزاء ترکیبی معلوم ہو سکتی ہیں۔ اول ہم منشک قائم الزاویہ کا حل لکھتی ہیں جس میں دو جزاء سوا زاویہ قائمہ کی معلوم فرض کئی گئی ہیں

(۴۲) منشک قائم الزاویہ کی حل کرنی کی جتنی صورت فائزہ کی ضرورت ہوگی وہ باب گذشتہ سے منشک کی کسی زاویہ مثل اس کو قائمہ فرض کرنی حاصل ہو جائیگی لیکن وہ ملا واسطہ ہی نہایت آسانی سے ثابت ہو سکتی ہیں اب ہم اوٹکو جدا گانہ ثابت کرتے ہیں



فرض کرو کہ اب س ایک منشک کروئی ہی جس کا زاویہ س قائمہ ہی اور مرکزہ کا ہی کسی نقطہ ق سی و آ میں ق م عمود و س پر اور نقطہ م سی م عمود ب پر نکالو اور ملاؤن ق تو ق م عمود م پر اس سبب ہی ہوگا کہ سطح مستوی لڑ س عمود سطح مستوی ب و س پر ہی ثابت ہوگا

$$ع ق = ع م + م ن = ق م - م ب + م ب = ق م - م ن = ق م - م ن$$

اسی واسطے ق ن و ایک منشک قائم الزاویہ ہے اور

$$(۱) \quad \frac{ق م}{ق ن} = \frac{ق م}{ق ن} = \frac{ق م}{ق ن} \text{ یعنی حجم طس} = \text{حجم طاب طس}$$

$$(۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ق م}{ق ن} = \frac{ق م}{ق ن} \text{ یعنی جب طس} = \text{جب ب جب طس} \\ \text{علیٰ ہذا القیاس جب طا} = \text{جب ل جب طس} \end{array} \right.$$

$$(۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ق م}{ق ن} = \frac{ق م}{ق ن} \text{ یعنی مس طا} = \text{حجم ب مس طس} \\ \text{علیٰ ہذا القیاس مس طب} = \text{حجم ل مس طس} \end{array} \right.$$

مثلث کروہی ضلع اور زاویوں کے مثلثی جملہ

۳۲

باب چہارم

$$\frac{م}{م} = \frac{م}{م} = \frac{م}{م} \text{ یعنی مس طب = مس ب جم طا } \dots (۴)$$

علیٰ ہذا القیاس مس طا = مس ا جم طب

صور (۴) کو باہم ضرب دو تو

$$\frac{مس ا مس ب}{مس طا مس طب} = \frac{جم طا جم طب}{جم ط مس} = \frac{مس ب}{مس ا} \text{ بموجب (۱) کے}$$

$$\text{اسی واسطی جم ط مس = مم ا مم ب} \dots (۵)$$

(۲) کے صورتوں میں ضرب چلیسائی لگاؤ تو

$$\text{جب طا جم ب مس ط مس = مس طا جب ا جب ط مس}$$

$$\text{اسی واسطی جم ب = جب ا جم ط مس} = \frac{جم ا جم ط}{جم طا} \text{ بموجب (۱) کے}$$

$$\text{پس جم ب = جب ا جم ط} \dots (۶)$$

ان چہرہ صورت قانونیہ میں دس مساواتیں ہیں اور ان میں مثلث قائم الزاویہ کی حل کی سب سے تین اگلی ہیں پہلی کہ پانچ بقا دیر طا وطب وطس دواوب میں تین تین کی ترتیب میں لین تو اوکا اجتماع دس ہوگا اور دس ہی مساواتیں ہیں پہلی ہر مساوات اجتماع تین مقادیر کا پانچ مقادیر میں ہی پس جب دو مقدار میں ان پانچ مقداروں میں ہی معلوم ہوں تو تیسرے مقدار مساوات ہاوردکورہ بالا میں سی کسی نہ کسی طرح دریافت ہو جائیگی

(۶۳) ہم نے اوپر بیان کیا ہی کہ چہرہ صورت قانونیہ باب گذشتہ کی صورت قانونیہ میں اس کے قائمہ فرض کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں اس طرح کہ (۱) دفعہ ۳۴ سی (۲) دفعہ ۴۱ سی (۳) چوتھی اور پانچویں مساوات دفعہ ۴۲ سی اور (۴) اول اور دوم مساوات دفعہ ۴۳ سی (۵) دفعہ ۴۴ کی تیسری مساوات سی اور (۶) دفعہ ۴۵ کی اول اور دوم مساوات سے چونکہ چہرہ صورت قانونیہ باب گذشتہ کی اور صورت قانونیہ میں جو مجموعہ ثابت ہوئیں ہیں مستند ہو سکتی ہیں پہلی دفعہ ۴۲ کی صورت قانونیہ کا ثبوت ہر صورت کی لمبی صحیح سی طالب علم خود مشق

اس بات کی گری کہ جب بقا و طوطس و لا و ب میں ہی قائمہ یا ربعہ دائرہ ایک ہو جائے گی
ہو تو ان صورتوں کی صورت میں کیا کیا تغیر و تبدل ہوگا

(۴۴) دفعہ ۴۲ کی صورتوں میں بعض خواص مثلث قائم الزاویہ کر دی کی مستند ہو سکتی ہیں
(۱) سی بہرہ مستند ہوتا ہے کہ جم طس کی وہی علامت ہی جو حاصل ضرب جم طاجم طس کی ہی اسی پہرہ
استخراج ہوتا ہے کہ کیا تو سب جیب التمامین مثبت ہیں یا صرف ایک مثبت ہے پس اس سے مثلث قائم الزاویہ میں
کیا تو تینوں ضلعی ربعہ دائرہ سی کم ہیں یا ایک ضلع کم از ربعہ اور باقی دو زیادہ از ربعہ ہیں
(۲) سی بہرہ مستند ہوتا ہے کہ مس طاک کی وہی علامت ہی جو مس لگ کی ہی ہو سیوا اور طاک تو
دونوں ٹری کے سی یا جو ٹی فونو کے سی ہیں مس کو سطح بیان کیا کرتی ہیں کہ اور طاد و نو تخریص
ہیں اور ایسی ہی ب اور طب متحدہ الصفت ہیں

(۴۵) دفعہ ۴۲ کی صورتوں میں کو سطح ہی بیان کر سکتی ہیں جس طرح غبی لکھا ہے وہ یادداشت کی لئے
فائدہ میں اور ان نتائج پر وہی نمبر لکھی ہیں جو دفعہ ۴۲ میں درج ہیں زاویہ قائمہ کی سہمی کی ضلع کو دوسرے نمبر

جم وتر = حاصل ضرب جیب التمام ضلع کے (۱)

جم وتر = حاصل ضرب ماس التمامون زاویوں کے (۵)

جس ضلع = جیب مقابل کے زاویہ کی \times جب وتر (۲)

مس ضلع = مس وتر \times جیب التمام جم زاویہ دریانی (۳)

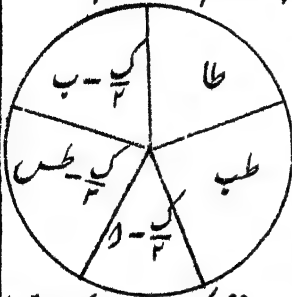
مس ضلع = مس مقابل کی زاویہ \times جیب دوسرے ضلع ہیں (۴)

جم زاویہ = جم مقابل کی ضلع \times جیب دوسرے زاویہ کی (۶)

(۴۶) قواعد تیسرے صواب کے۔ دفعہ ۴۲ کی صورتوں میں قواعدوں میں بیان ہو سکتی ہیں اور باقی قواعد

موجود تیسرے صواب ہوئی ہیں پہلی ان قواعد کا نام قواعد تیسری رکھا ہے۔ اول اولیٰ تیسرے صوابی تھے
کتاب چھوٹی تھی جس میں نو کار تھے اور قواعد خاصہ مدر کے لکھی تھی جس کا مروج ہی انکی موجود نہ تھے
اب ان قواعد کے بیان کرنے میں زاویہ قائمہ کا کچھ خیال نہیں کرتی اس کو چھوڑ دیتی ہیں

اور باقی دو ضلعوں کو جو زاویہ قائمہ کے محیط ہیں اور باقی دو زاویوں کی غامی کو غامی دتر کو مثلث کے اجزاء مدور کہتی ہیں پس پانچ اجزاء مدور ہوئی ط و طب و کپ۔ ا و کپ۔ طس و کپ۔ ب۔



جس ترتیب سے یہ اجزاء مدور مثلث میں واقع ہوتی ہیں

اوسی ترتیب سے ہم فی او کو دائرہ کی گردا گرد لکھ دیا ہی

ان حص مدور میں کسی ایک کو منتخب کرو اور اس کا نام جز متوسط

رکھو اور اس کی ادھر ادھر چھ رہت جو اجزاء ہوں او کو اجزاء متصل

قرار دو اور باقی دو اجزاء کو اجزاء منفصل۔ مثلاً اگر کپ۔ ب کو منتخب کریں اور اس کو جز متوسط

قرار دیں تو اس کی اجزاء متصلہ ط و کپ۔ طس ہو گئی اور اجزاء منفصلہ کپ اور کپ۔ ا ہیں

پس قاعدی نیچر جس کے لیے ہیں کہ

جب جز متوسط = اجزاء متصلہ کے ماسون کے حاصل ضرب کے

جب جز متوسط = اجزاء منفصلہ کے جیب التماموں کی حاصل ضرب کے

(۴) نیچر جس کی قاعدی سطح ثابت ہوتی ہیں کہ وہ بالکل مطابق نتائج سابقہ کے ہیں اور جدول

ذیل سی بہرہ تطبیق عجیب ہو جائیگی اول ہم فی اس جدول میں جز متوسط لکھی ہیں اور بہرہ نتائج قواعد

نیچر کے اور بعد ازاں وہی نتائج دفعہ ۴۲ کی جو ثابت کرائی ہیں اور ان پر نمبر حوالہ دیتی کے

لمی نہیں ڈال دی ہیں

کپ۔ طس جب (کپ۔ طس) = مس (کپ۔ ا) مس (کپ۔ ب) . جم طس = مم ا مم ب (۵)

جب (کپ۔ طس) = جم طار جم طب جم طس = جم طار جیب ط (۶)

کپ۔ ب جب (کپ۔ ب) = مس ط مس (کپ۔ طس) جم ب = مس ط مم طس (۳)

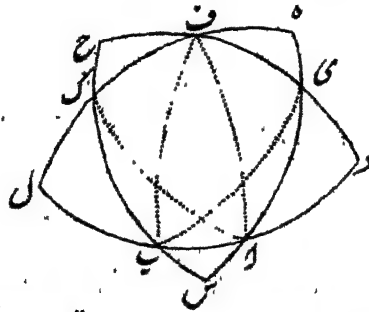
جب (کپ۔ ب) = جم طب جم (کپ۔ ا) جم ب = جم ط جیب ا (۴)

ط جیب ط جیب طس (کپ۔ ب) جیب ط مم طس (کپ۔ ب) جیب ط = جیب ط جیب ب (۲)

جب ط جیب ط = جم (کپ۔ ا) جم (کپ۔ ب) جیب ط = جیب ط جیب طس (۱)

قطب = مس (ک-ا) مس طا
 جبیط = جم (ک-ب) جم (ک-طس)
 ک-ا جب (ک-ا) = مس طب مس (ک-طس) جم ا = مس طب مم طس (۳)
 جب (ک-ا) = جم طاحم (ک-ب) جم ا = جم طاحب ب (۴)

اخر جہاں صورتیں لکھی ہیں ان کا لکھنا گویا دوبارہ او نہیں صورت کا لکھنا ہر پہلی لکھی چکی ہیں اور نوین
 اٹھویں صورت ہی میں جو پانچویں اور چھٹی میں اور نوین اور دسویں وہی ہیں جو تیسرے اور چوتھی
 (۶۸) یہہ جو کہا گیا ہے کہ قواعد نیچر او اس ترکیبے جو اوپر مذکور ہوئی کسی اور طرح نہیں ثابت ہوتے
 غلط ہی اسلئے کہ سوا ترکیب مذکور بالا کی نیم چھائی خود اپنی ایک کتاب میں ثبوت ان قواعد کا لکھا ہے
 ہم اس کا اختصار کر کے بیان کرتے ہیں



فرض کرو کہ اب اس مثلث کروی قائم الزاویہ ہی اور زاویہ س قائم ہی ب کو قطب مقرر کر کے
 دائرہ عظیم دہی فتح کہیں اور ا کو قطب مقرر کر کے دائرہ عظیم ہ ف ک ل کہیں اور اصل مثلث اب س ک
 اضلاع کو گھنچے جو ان دائروں میں ملیں پس چونکہ ب قطب دہی فتح کا ہی تو زاویہ دہی فتح قائم ہیں
 اور چونکہ ا قطب ہ ف ک ل کا ہی زاویہ ہ ا و س ک ل قائم ہیں اسی معلوم ہوا پانچ مثلث
 ب ا و س اور ا و ی دہی فتح اور ف ک ل ا و ک ب ل قائم الزاویہ ہیں اور امتحان سے یہ علم
 خوب تحقیق ہو جائیگا کہ گویا پانچ مثلثوں کی اجزائے جدا جدا ہیں مگر اجزاء ملے ہوئے ایک ہی ہیں
 مثلاً مثلث ا و ی دہی فتح زاویہ ی ا و دہی فتح زاویہ ی ا و س کی ضلع ا و دہی فتح اب کے ہے

بانیخیم مثلث قائم الزاویہ کا اصل

اور اس ترتیب میں وتر اول ہی اور زاویہ قائمہ کو بالکل چھوڑ دیا ہی تو اصلی اجزاء، مثلث ای کے وتر ہی شروع ہو کر اور قائمہ کو چھوڑ کر بالترتیب بہم ہونگی کپ۔ طام۔ دیک۔ طام۔ دیک۔ طام۔ دیک۔ طام۔ دیک۔ اور طام۔ مہیو اگر اول مفاد میں تیز کیا کرتی ہو تو ایک سلسلہ مفاد میں کافی اوقہ۔
وقہ۔ وقہ۔ وقہ داخل کریں پس طام + ق = ۱ = طام + ق = ۲ = طام + ق = ۳ = کپ اور ق = ۴۔ طام۔

اورق ہ = طام بس اگر اصلی مثلث کی تخصیص اورق ہ وق ہ وق ہ سے کیجائی تو دوسری
 مثلث کی ق ہ وق ہ وق ہ وق ہ کی تخصیص ہوگی اور اسی طرح سی دوسرے مثلث سی تیسرا
 مثلث پیدا ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس اس واسطے ہم ہر مثلث قائم الزاویہ کو ایک مجموعہ پانچ مثلثوں کا
 خیال کر سکتے ہیں جنہیں سی ہر ایک مخصوص ان پانچ متعادلیں وق ہ وق ہ وق ہ وق ہ وق ہ سی ہے
 جنہیں سی باری باری سی ترتیب میں ہر ایک اول لیا جائی

(۷) قواعد نیپری ہی جو فوائد و عملیات میں حاصل ہوتی ہیں اوس میں ہندسین مختلف المرای نہیں
وڈہ موس حساب لگتی ہیں کہ سار علم ریاضی میں کوئی ایسی اور دو قاعدی مختصر اور تہاں نہیں ہیں
جیسی کہ نیپر حساب کی پچھ قاعدی ہیں قاعدہ کی بڑی خوبیاں یہ ہیں کہ وہ آسان اور مختصر ہوں اور انکو
اعمال میں تطویل نہ ہو اسیری حساب اپنی علم مثلث کی رسالہ میں یہ ایک فقرہ لکھتی ہیں کہ دلبر صاحب
بڑی تجربہ کا تھی انکی راسی بڑا اعتبار اس معاملہ میں لکھتی ہی وہ یہ لکھتی ہیں کہ حامل اور محاسب
کو یہ قاعدی بغیر کسی تعلق کی خوب یاد رہ سکتی ہے بحساب ان قواعد کو اس صورت میں کہ وہ کسی اور سے
کچھ تعلق نہیں رکھتی بہت اچھی طرح یاد رکھنا ہی پروفیسر ڈی مورگن نیپر حساب کی قواعد پر بڑا
اعتراض کرتی ہیں اور اپنی علم مثلث کی وی میں تحریر فرماتی ہیں کہ قواعد نیپری اجزاء و مدد کی ہم اس سے
نہیں لکھتی کہ وہ حافظہ میں بڑا انتشار پیدا کرتی ہیں گوارہ ہندسین نے یہ لکھا ہی کہ انکو اس مطلب
کے یاد رکھنے میں بڑی مدد و حافظہ کی ہوتی ہے

(۷۱) اب ہم دفعہ ۴۲ کی صورقانونی کو مثلث قائم الزاویہ کی حل کرنے میں کام میں لائیں گے یہی
 ہم فی فرض کر لیا یہی کہ متعارف معلومہ اول و جید و درمیان واقع ہیں جو دفعات ۲۲ و ۲۳

میں بیان کی گئی ہیں یعنی ضلع معلوم محیط دائرہ عظیم سی اور ہر یک زاویہ دو قائمہوں سے کم ہے۔

چہرہ صورتیں ہیں جن کا بیان ہوتا ہے

(۷۲) وتر طس اور زاویہ ۱ معلوم ہے

(۳) و (۵) اور (۲) دفعہ ۴۲ سے

مس طس = مس طس اور مم ب = جم طس مس ۱ اور جب ط ۱ = جب طس جب ۱

ان سی طس اور ب بغیر شبہ ۱ کی معلوم ہو جائیگی اور طامخہ الصفت ۱ کا ہو جب دفعہ ۴۲ کی ہے

تو ط ۱ بھی بغیر شبہ کے دریافت ہو جائیگا

اب اس حل کی حالتوں کی دیکھنی سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ ہمیشہ ممکن ہے

اگر طس اور ۱ دو نو قایمی ہوں تو ط ۱ ایک قائمہ ہوگا اور طس اور ب غیر المعین ہوں گے

(۷۳) ایک ضلع طس اور متصل کا زاویہ ۱ معلوم ہے

دفعہ ۴۲ کے (۳) (۴) (۵) کے موافق

مس طس = مس طس اور مس ط ۱ = مس ۱ اور جب طس اور مم ب = جم طس جب ۱

ان سی طس و ط ۱ اور ب دریافت ہو جائیگے اور کوئی شبہ ان کی معلوم ہونی میں نہیں ہے گا اور یا ملت ہمیشہ ممکن

(۷۴) دو ضلع ط ۱ و طس معلوم ہیں

دفعہ ۴۲ کے (۱) و (۴) کے مطابق

جم طس = جم ط ۱ اور مم ب = مم ط ۱ اور مم ب = مم طس جب ط ۱

یہاں طس اور ۱ اور ب بغیر کسی شک کی دریافت ہو جائیگے اور یا ملت ہمیشہ ممکن ہے

(۷۵) وتر طس اور ضلع ط ۱ معلوم ہیں

دفعہ ۴۲ کے (۱) (۳) (۲) کے مطابق

جم طس = جم طس اور مم ب = مس ط ۱ و جم ۱ = جم طس جب ط ۱

یہاں طس و ب اور ۱ کی کسی شبہ کی دریافت ہو گئی اس واسطے کہ ۱ اور طامخہ الصفت میں

ان صورتوں میں ہمیشہ مشلت کی ممکن الوجود ہونی کی لکی معطیات کی حدود ہونی میں اور ان پر تو فیہ فرض ہوگا۔
مثلاً یہاں اس حل کی صورت میں طس درمیان طاورک۔ طاک کی واقع ہونا چاہی تاکہ تینیں جم طب
وجہ ب اور جب ب کی تعداد میں بڑی واحد سی نہ ہوں

اگر طس اور طاورا کوئی قائمی ہیں تو ایک قائمہ ہی اور طب اور ب کا اس صورت میں کچھ نہیں ہو سکتا اور اگر

(۷۶) دوزاوی ۱ اور ب معلوم ہیں

یہاں دفعہ ۴۲ کے (۵) (۶) کے موافق

جم طس = مم ۱ مم ب اور جم طا = جم ۱ اور جم طب = جم ب

یہاں طس اور طا اور طب بغیر کسی شبہ کی دریافت ہوگئی اب یہاں معطیات کی حدود پر مشلت

ممکن الوجود ہونی کی واسطی غور کرنی چاہی اول فرض کرو کہ کم کپ سی ہی توب درمیان کپ۔ اور

کپ + اکی واقع ہی دوم فرض کرو کہ لپٹر ا کپ سی ہی توب درمیان کپ۔ (ک۔ ۱) اور کپ +

(ک۔ ۱) یعنی درمیان ۱۔ کپ اور کپ۔ ۱ کے واقع ہوں

(۷۷) ایک ضلع طا اور اوسکے مقابل کا زاویہ ۱ معلوم ہے

یہاں دفعہ ۴۲ کے (۲) (۳) (۴) کے موافق

جب طس = جم طا اور جب طب = مس طام ۱ اور جب ب = جم ۱

یہاں ایک شبہ کا مقام ہی اسلی کہ اجزاء بوساطت اونکی جو ب کی دریافت ہوئی ہیں

اگر جب طا کم جب اسی ہو تو طس کی دو قیمتیں داخل ہو سکتی ہیں اور ان دو قیمتوں میں سے

ہر ایک قیمت کی مطابق اکثر ایک قیمت طب کی دریافت ہوگی کیونکہ جم طس = جم طا جم طب کی

اور ایک قیمت ب کی داخل ہو سکیگی کیونکہ جم طس = مم ۱ مم ب

اسی معلوم ہوا کہ اگر ایک مشلت ممکن الوجود موافق ان اجزاء معلومہ کی ہو تو اکثر دوسرے مشلت

بھی ہوگا اور صرف دو ہی مشلت ایسی ہو سکتی ہیں کہ اونکی اجزاء معلومہ ایک ہی ہو

ہم فی بعض اکثر کا اوپر لکھا ہی کیونکہ یہ کچھ ضروری نہیں کہ ہمیشہ دو ہی مشلت ہو اگرچہ بعض

صورتین متفقہ ہیں اول یہ کہ
طا = ا کے ہو تو اس صورت میں ایک ہی مثلث ہوگا اگر طا و طب میں سے ہر ایک قائمہ نہ ہو
تو طب او عب نہیں ہو سکتے وہ غیر متعین رہینگے
مثلث کی دیگر ہستی ہی اس حل کا مشتبہ ہونا باسانی سمجھ میں آئے گا



اسو سطحی کہ فرض کرو موافق شرائط معلومہ کی ا ب س ایک مثلث ہی ا ب اور اس کو خارج کر
چتر ہیں تو مثلث ا ب س ہی شرائط معلومہ کی موافق ایک اور مثلث ہوگا اسو سطحی کہ او میں س بڑا ہو
قائمہ ہی اور ب س ضلع معلوم ہی اور ا = ا تراویہ معلوم کے
اگر طا = ا تو صور حل ہی ثابت ہوتا ہی کہ ط س اور طب اور ب قائمہ زاویہ ہیں اس صورت میں ا
قطب ب س کا ہی اور مثلث ا ب س مساوی بالقرینہ مثلث ا ب س کی ساتھ موافق دفعہ ۵ کی کہتا ہے
اگر طا اور ا دو تو قائمہ ہیں تو ب قطب ا س کا ہی اور ب اور طب برابر ہیں مگر ان کے قیمت
کا کچھ ٹھکانا نہیں سب کچھ ہو سکتی ہے

ان مصطلحات کی حدود میں جیسی کہ مثلث کا امکان معلوم ہوتا ہی — بموجب دفعہ ۴۷ کے
ا اور طب متحرک نصف ہونی چاہی اسی معلوم ہوتا ہی کہ صور قانونیہ حل میں طا چھوٹا و سی ہوتا چھوٹا
اگر دو نو حادی ہیں اور بہ نسبت ا کی بڑا ہو چاہی اگر دو نو منفرج ہیں
اگر ا ب س مثلث ہو حسین زاویہ قائمہ ہو تو ہی ہلک کی مثالوں میں ثابت کرو کہ یہ تعلقات ہونے لگتے ہیں

$$(۱) \text{ جب } ط س = \text{ جب } ط ا + \text{ جب } ط ب \text{ } \Rightarrow \text{ جب } ط ا + \text{ جب } ط ب$$

$$(۲) \text{ من } ط (ط س + ط ا) = \text{ من } ط (ط س - ط ا) = \text{ من } ط$$

$$(۳) \text{ جب } (ط س - ط ا) = \text{ من } ط \text{ جب } (ط س + ط ا)$$

(۴) جب طامس $\frac{1}{4}$ اور جب طبمس $\frac{1}{4}$ ب = جب (طا - طب)

(۵) جب (طس - طا) = جب ط ب جم ط م س ا ب

جب (طیس۔ طا) = مس طب جم طس میں $\frac{1}{2}$ ب

(4) اگر اس میں مثلث کروی ہو اور اس اوپر زاویہ قائمہ ہو اور حجم 1 = حجم طاقون ثابت کرو کہ اگر اس میں قوطب 4 طس = 1/4 کہ

بشرطیکہ طب و طس دونوں کم کیے ہی ہوں اور طا + طس = س کے بشرطیکہ طب و طس دونوں بڑی س کے ہوں

(۷) اگر سہ اور سہ تو سو نہیں ہی ایک محمود و نرطس پر ہوا اور دوسرا اس کی تنصیف کری تو ثابت کر کہ

جب طیں $\sqrt{(1 + \text{جب}^2 \text{طا})} = \text{جب ص}$

(۸) مثلث میں اگر س قائمہ ہو اور نقطہ وسط اب کا ہو تو ثابت کرو کہ

ج۴ طس ج۲ س د = جب۲ طا + جب۲ طب

(4) مثلث قائم الزاویہ میں اگر طول اوس قوس کا ہو جو سہی وتر اور باہر عمود کا فی جانوں ثابت کر لے

محر = (محرط + محط)

(۱۰) مثلث قائم الزاویہ کی جگہ کا زاویہ قائم ہی اور احادہ ہی اور فوس طرہ

عظیم کی عمود اور کبریا کی ہی اور اس عمود پر اور علیٰ ہذا القیاس تو ثابت کرو کہ ان میں

فنا ہو جائیگی جب ن لاہنایت ہو اور دریافت کرو قیمت

حجم اول، حجم دوم، حجم سوم۔۔۔ لایہ نیا کی

(۱۱) اب س ایک مثلث کبریٰ قائم الزاویہ ہی اور الزاویہ قائمہ نہیں ہی تو ثابت کرو کہ اگر $\angle A = 90^\circ$ طا

تو طس اور طب رعیات ہیں

(۱۲) اگر حرطول اوس فوس کا ہو جس سے عمود اب ہر کسی مثلث میں نکالاجای تو ثابت کرو کہ

جرم حر = مم طس (جرم ط + جرم ط ب - جرم ط جرم طس) $\frac{1}{2}$

(۱۳) کہہ گا اب میں دائرہ عظیم ہی لاؤ اور بے اور سس تو سین دائرہ عظیم کے ہیں

اور اب اس کی ساتھ زاویہ قائم بنائی ہیں اور مثبت شمار اس حالت میں کی گئی ہیں کہ ایک ہی طرف اس کی واقع ہوں تو ثابت کرو کہ Δ ب اور Δ س دائرہ عظیم پر جب واقع ہوگی کہ

$$\text{مس د} + \text{جب س ب} + \text{مس ب ب} + \text{جب س د} + \text{مس س د} = \text{مس س ب} + \text{جب د ب} =$$

(۱۴) مثلث کی زاویوں Δ ب د اور Δ س د سے عمود مقابل کی اضلاع پر لگائی گئی ہیں اور تقاطع دوی و فیہ

تو ثابت کرو کہ Δ مس ب د مس س ب مس د س = مس د س مس ب د

(۱۵) Δ لا اور Δ ی ایک کرہ کی دو دائری عظیمیں ہیں اور آئینہ ایک دوسرے کی ساتھ زاویہ قائم بنائی ہیں

نقطہ قی اور دائرہ عظیم Δ ب میں ہی Δ س = ق کی ایک قوس عمود Δ ب پر نقطہ Δ سی ہی اور زاویہ

س Δ = Δ کے Δ لا کی ساتھ بنائے ہیں ق م اور ق ن قوسیں عمود Δ لا و Δ ی پر ہیں تو ثابت کرو کہ اگر

$$\Delta \text{ م} = \Delta \text{ لا اور } \Delta \text{ ن} = \Delta \text{ کو}$$

$$\Delta \text{ جم ہیہ مس لا} + \Delta \text{ جب ہیہ مس د} = \Delta \text{ مس ق}$$

(۱۶) مقام ایک نقطہ کا کہ پر لچاؤ دو دائرہ عظیمہ متقاطع علی القیام کی متعین کیا گیا ہی اور ہیہ

دونو دائری نیم کرہ محوروں کے ہیں اور دائرہ عظیمہ کی قوسیں جو اس نقطہ پر اور محوری دونوں

پر جو ان کی نقطہ تقاطع سے $\frac{1}{2}$ فاصلہ پر مٹی ہیں گذر تی ہیں تو ثابت کرو کہ اگر لفظی (بروسر) اور (بروسر)

اور (بروسر) ایک ہی دائرہ عظیم میں واقع ہوں تو

$$\text{مس سر} (\text{مس بر} - \text{مس بر}) + \text{مس سر} (\text{مس بر} - \text{مس بر}) + \text{مس سر} (\text{مس بر} - \text{مس بر}) =$$

(۱۷) اگر دو دائرہ عظیمہ متقاطع علی القیام قائم مقام محوروں کی ہوں اور کرہ پر ایک نقطہ دو دائرہ

محاط سے بوساطت اجزاء ان محوروں کی مقرر کیا جا ہی اور ہیہ محور دو دائرہ عظیمہ سے جو اس نقطہ

اور ان دو نقطوں پر محور کی جنکا فاصلہ نقطہ تقاطع سے $\frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ مساوات دائرہ عظیم کی ہیہ

$$\text{مس بر م سب} + \text{مس بر م ص} = \Delta$$

(۱۸) مثلث میں اگر Δ = ک د ب = ک س اور س = ک تو ثابت کرو کہ ط ا ط ب + ط س = ک

باب ششم حل مثلثات غیر قائم الزاویہ کا

(۷۸) بعض خاص صورتیں مثلث غیر قائم الزاویہ کی حل کی ایسی ہی ہوتی ہیں کہ وہ مثلث قائم الزاویہ کی حل کی مستعدت سے حل ہو جاتی ہیں اول ہم یہ خاص صورتیں لکھتی ہیں اور بعد ازاں تمام صورتیں مثلث غیر قائم الزاویہ کے تحریر کریں گے

(۱) فرض کرو کہ ایک مثلث کی اضلاع معلومہ میں سے ایک ضلع برابر ربعہ دائرہ کی ہے۔ اس صورت میں مثلث قطبی میں زاویہ مذکور کی مطابق قائمہ ہوگا تو پہلی باج کے قواعد کی موافق مثلث قطبی حل ہو جائیگا اور سطح مثلث اولی کی اجزاء ترکیبی معلوم ہو جائیں گے

(۲) فرض کرو کہ اجزاء معلومہ میں ایک مثلث کی دو برابر ضلعی ہیں یا دو برابر زاویہ کی۔ اس ایکس اس سے نقطہ وسط قاعدہ میں کھینچو تو مثلث دو برابر مثلثوں قائم الزاویہ میں تقسیم ہو جائیگا تو ان مثلثوں میں سے ایک مثلث کی معلوم ہوتی ہے اجزاء مطلوب معلوم ہو جائیں گے

(۳) فرض کرو کہ اجزاء معلومہ مثلث میں سے دو ضلعی ایسی ہیں کہ ایک مکملہ دوسرے کا ہی یا دو زائے ایسی ہیں کہ ایک نین کا مکملہ دوسرے کا ہی مثلاً فرض کرو کہ طب + طس = کہ باب + س = کہ خارج کرو ب اور ب س کو جو نقطہ ب ملیں (دفعہ ۳۸ کی اول شکل دیکھو) تو مثلث بندس کے دو برابر اضلاع یا دو برابر زاویہ معلوم ہونگی تو بموجب صورت بالا کی مثلث کا حل مثلث قائم الزاویہ کے حل پر منحصر ہو جائیگا

(۷۹) اب ہم تمام صورتیں مثلث غیر قائم الزاویہ کی حل کرتی ہیں انکی چھ صورتیں ہیں (۸۰) تینوں ضلعی معلوم ہیں

ہم کو معلوم ہے $\frac{\text{جم ط ا} - \text{جم طب جم طس}}{\text{جم طب جم طس}} = \frac{\text{جم ط ا}}{\text{جم طس}}$ اور علیٰ هذا القیاس جم ب اور جم س کی کیفیت ہے اور اگر ہم ایسی صورت کو کام میں لانا چاہیں کہ جبکہ حساب لو کارٹھم سے باسانی ہو سکے تو ہم کو صورتیں چھ تمام با ماس نصف زاویہ کی بموجب دفعہ ۷۵ کی کام میں لانی چاہی۔ ہر صورت کی انتخاب میں علم مثلث متقیہ الاضلاع کی دفعہ ۷۵ پر لحاظ چاہی

(۸۱) تینوں زاویہ معلوم ہیں

یہاں ہم کو معلوم ہے کہ $\text{جم} + \text{طا} = \text{جم} + \text{جب} + \text{س}$ اور ایسی ہی صورتیں جم و طب جم کے لیے دریافت کرو
اگر ہم ایسی صورت کو کام میں لانا چاہیں کہ اوسکا حساب لوکارغم سی باسانی ہو سکی تو دفعہ ۴۹ کے
جیب و جیب التمام ناماس نصف ضلع کو کام میں لانا چاہی
کوئی شبہ کا مقام ان دو مثلثوں کی حل میں نہیں ہے لیکن اجزاء معلومہ ایسی ہو سکتی ہیں
کہ جنسی مثلث کا بنانا ممکن ہو

(۸۲) دو ضلعی اور زاویہ درمیانی اوسکا (طا و س طب) معلوم ہیں

مثالوں سے

$$\text{نس} \frac{1}{2} (1 + \text{ب}) = \text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) \quad \text{م} \frac{1}{2} \text{س}$$

$$\text{مس} \frac{1}{2} (1 - \text{ب}) = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) \quad \text{م} \frac{1}{2} \text{س}$$

انے $\frac{1}{2} (1 + \text{ب})$ اور $\frac{1}{2} (1 - \text{ب})$ معلوم ہو جائینگے اور اوسے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ دریافت ہو جائینگے
پھر طس اس صورت سے دریافت ہو جائیگا کہ

$$\text{جب طس} = \text{جب طا جب س}$$

جب ۱

اس صورت میں چونکہ طس اوسکی جیب ہی معلوم ہوتا ہے اس سبب یہ نہیں تحقیق ہو سکی گا کہ دو
قیمتوں میں سے کوئی قیمت اوسکی حساب میں لائیں کہ یہی اس بات کا فیصلہ اس طرح ہی ہو جاتا ہے
کہ بڑا ضلع مثلث کا مقابل بڑی زاویہ کی ہوتا ہے یا ہم طس کو مساوات (۱) دفعہ ۵۴ سے دریافت کریں
جس میں شبہ کا کوئی مقام نہیں ہے

یا ہم طس کو پہلی ۱ اور ب کی معلوم کرنی سے دریافت کریں اس صورت

$$\text{جم طس} = \text{جم طا جم طب} + \text{جب طا جب طس جب طس}$$

اس میں کوئی شبہ کی جگہ نہیں ہے - یہ صورت لوکارغم کے لائینی اس طرح ہو سکتی کہ

$$\text{جم طس} = \text{جم طب} (\text{جم طا} + \text{جب طا بس طب جم س})$$

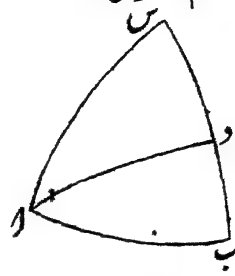
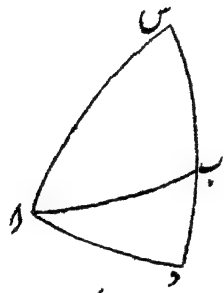
فرض کرو کہ مس بر = مس طب جم س تو

بیشتم حل مثلثات غیر قائم الزاویہ کا۔

۴۵

$$\text{مس طس} = \text{جم طب} (\text{جم طا} + \text{جب اس بر}) = \frac{\text{جم طب جم} (\text{طا} - \text{بر})}{\text{جم بر}}$$

پس یہ لوکارخم کے لایق ہوگئی



یہ ہم اس صورت کو اس طرح حل کریں کہ مثلث کی تحویل دو مثلث قائم الزاویہ کی مجموعہ باتفاق و
کی طرف کر لیں نقطہ اسی قوس او دعو دس ب پر یا س ب خارج شدہ ہر نکالو بموجب دفعہ ۴۲ کہ

$$\text{مس س د} = \text{مس طب جم س اسے س د معلوم ہوگا اور پرب در یافت ہو جائیگا۔ یہ بموجب دفعہ ۴۲}$$

$$\text{جم طس} = \text{جم او د جم دب} = \text{جم دب جم طب}$$

اسے طس کو معلوم کرتے ہیں

یہ ظاہر ہے کہ س د وہی جو دفعہ کے اول ہی میں بر سے تعبیر ہوا تھا
بموجب دفعہ ۴۲ کے

$$\text{مس او د} = \text{مس س جب س د اور س او د} = \text{مس او ب جب دب}$$

$$\text{پس مس او ب جب دب} = \text{مس س جب بر}$$

جہاں دب = طا۔ ہر جب س ب پر د ہو اور دب = بر۔ طا جب خارج شدہ س ب پر کوئی ہو

ہو اور او ب د کیا ہی یا تکملہ کا اس صورت سی ب کو بغیر کسی تعلق او کی دریافت کر سکتے ہیں

پس اس صورت میں کوئی اصلی شبہ نہیں ہے اور مثلث کا بنا ہمیشہ ممکن ہے

(۸۳) دوزاوی اور اونکی درمیان کا ضلع (او طس و ب) معلوم ہیں

مثیلات نمبر ہی سے

$$\text{مس} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) = \frac{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{او} - \text{ب})}{\text{مس} \frac{1}{2} \text{طس}}$$

مس $\frac{1}{2}$ (طا - طب) = جب $\frac{1}{2}$ (ا - ب) مس $\frac{1}{2}$ طس
 انیس $\frac{1}{2}$ (طا + طب) و $\frac{1}{2}$ (طا - طب) دریافت ہوگا اور پہرا و نسی طا اور طب معلوم ہونگے
 پہر اس صورت جب س = جب $\frac{1}{2}$ طس سے معلوم ہو جائیگا
 اس صورت میں چونکہ س او کی جب سی دریافت ہوتا ہی سلی یہ پہرے تحقیق ہو سکتا ہے کہ او کی
 دو قیمتوں میں سی کو کسی قیمت یعنی چاہی بعض اوقات اس بات کا اس طرح فیصلہ ہو جائیگا کہ ٹر زاویہ
 مقابل ٹری ضلع کی ہوتا ہی یا ہم س کو مساوات (۳) دفعہ ۴۴ سی دریافت کریں جو شبہ سی بالکل خالی ہے
 یا ہم س کو پہلی طا اور طب کی دریافت کرنے سی اس صورت سے دریافت کریں
 جم س = - جم ا جم ب + جب ا جب ب جم طس
 یہ لوکار نم لینے کے قابل اس طرح ہو سکتی ہے کہ
 جم س = جم ب (- جم ا + جب ا مس ب جم طس)
 فرض کرو کہ مم سر = مس ب جم طس تو
 جم س = جم ب (- جم ا + مم سر جب ا) = $\frac{\text{جم ب جب ا} (- ا - سر)}{\text{جب سر}}$
 پس یہ قابل لوکار نم لینے کی ہے
 یا ہم اس صورت کو اس طرح حل کریں کہ مثلث کی تحویل دو قائم الزاویہ مثلثوں کی مجموعہ با تفاوت
 کی طرف کریں نقطہ اسی فوس ا د عمود س ب پر نکالیں (دفعہ ۸۲ کی دائیں طرف کی شکل دیکھو)
 تو بموجب دفعہ ۴۲ کے جم طس = مم ب مم د ا ب
 اسی د ا ب دریافت ہوتا ہی اور پہرا و سی س ا د معلوم ہو جائیگا اور پہر بموجب دفعہ ۴۲ کے
 جم ا د جب س ا د = جم س اور جم ا د جب ب ا د = جم ب
 اسیو $\frac{\text{جم س}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جم ب}}{\text{جم ب ا د}}$ انیسے س دریافت ہوتا ہے
 اب یہ ظاہر ہے کہ آغاز دفعہ ۴۲ جو کچھ سری لکھنا تھا وہ د ا ب ہے
 بموجب دفعہ ۴۲ کے

مس اء = مس اس جم س اء اور مس اء = مس اب جم ب اء کے

پس مس طیب حجم ساد = مس طس حجم سر

جہاں سے ارد = اس سے اس صورت سے ہم کو طب معلوم ہوتا ہے

علیٰ ہذا القیاس سطح عمل کرو کہ اسد خارج شدہ س دبر واقع ہو (دفعہ ۱۲ کی بائیں طرف کی شکل دیکھو)

پس اس صورت میں کوئی مقام شبہ کا نہیں ہے، اور مثلث کا بنا ہریشہ ممکن ہے

(۸۴) دو ضلعی اور ایک زاویہ متقابل ضلع کا (طاوطب و ۱) معلوم ہیں

زاویہ ب تو اس صورت سے معلوم ہوگا

جب ب = $\frac{\text{اجب طبا}}{\text{خبطا}}$ جب ا

اور پھر اس اور طس ان تمثیلات نیبری سے کہ

$$\text{مس} \frac{1}{2} \text{س} = \frac{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب})}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب})} \text{مم} \frac{1}{2} (\text{ب} + 1)$$
$$\text{مس } \frac{1}{4} \text{ طس} = \frac{\text{خم } \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})}{\text{جرم } \frac{1}{2} (\text{ا} - \text{ب})} \text{ مس } \frac{1}{4} (\text{طا} + \text{طب})$$

اس صورت میں چونکہ بابا و سکی حبیب ہی دریافت ہوئی ہی اسلامی بعض اوقات دحل ہوگی اور بعض اوقات

ایک حل ہی نہیں ہوگا جب قیمت جب اکی ایک بڑی ہوگی اور سو فی صد کوئی حل نہ ہوگا

بغیر کسی تعلق کی پکی ساتھ تم اس اوٹس کو دریا کرتے ہیں (صفحہ ۸۴ دیکھو)

بموجب دفعہ ۴۴ کے

حجم طاجب طب = حجم طب حجم س + جب س حجم = حجم طب (حجم س + حجم طب)

فرض کرو کہ $s = \frac{1}{\mu}$ تو

مما يجب طب = حجم طب (حجم س + من سرجيس) = $\frac{\text{حجم طب حجم (س - س)}}{\text{حجم س}}$

جم (س-سر) = جم سر مخم طامس طب

اس سوا تہی س۔ سر دریافت ہوگا اور پھر اسی میں معلوم ہوگا کہ وہیں ایک شہر ہی گا

حل مثلثات غیر قائم الزاویہ کا

۴۸

باب ششم

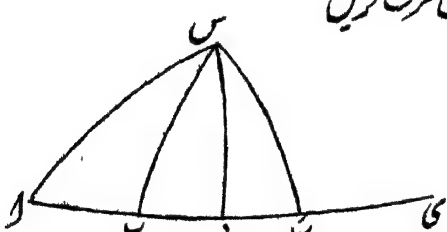
اسی کے آخر مساوات سی اگر س = سر = ط کے دریافت ہوتا ہی تو سر - س = ط مساوات کی لمب شرائط پوری ہونگیں اس واسطی قیمتیں س کی دو ہوئیں جو ٹھیک لگ سکتی ہیں اگر سر + ط کم بہ نسبت کہ کی ہی اور سر - ط مثبت ہے اور

$$\begin{aligned} \text{جم ط} &= \text{جم طب جم طس} + \text{جب طب جب طس جم} = \text{جم طب (جم طس + جب طس جب طب جم)} \\ \text{فرض کرو کہ مس بر} &= \text{مس طب جم ا پس اسطرح} \\ \text{جم ط} &= \text{جم طب (جم طس + جب طس مس پر)} = \frac{\text{جم طب جم (طس - بر)}}{\text{جم بر}} \end{aligned}$$

اسی واسطی

$$\text{جم (طس - بر)} = \frac{\text{جم ط. جم بر}}{\text{جم طب}}$$

اس مساوات سی طس - بر دریافت ہوگا اور یہ اسی طس معلوم ہوگا یہاں ہی ہی شہر ہی ہوتا ہے یا ہم اس صورت کو مانی ہی اسطرح حل کر سکتی ہیں کہ مثلث کی تحویل دو مثلث قائم الزاویہ کے مجموعہ با تفاوت کی طرف کریں



فرض کرو کہ س د = طب اور س ا د = زاویہ معلوم ا کے نقطہ س سی س د عمود اسی ہے، اور س ب اور س ب = ط ا پس شکل کی دیکھنی ہی معلوم ہوتا ہی کہ دو مثلث ایسی ہو سکتی ہیں کہ جو اجزا معلوم نہ رہیں پس پوچھئے فقہ ۴۲ کی جم طب = جم ا جم ا س د اسی اس د معلوم ہوتا ہے، پھر بموجب دفعہ ۴۲ کے

$$\text{مس س د} = \text{مس ا س. جم ا س د}$$

$$\text{اور مس س د} = \text{مس س ب جم ب س د یا مس س ب جم ب س د}$$

$$\text{اسی واسطی مس ا س جم ا س د} = \text{مس س ب جم ب س د یا مس س ب جم ب س د}$$

اسے بس دیا ب س معلوم ہوتا ہے
اب یہ ظاہری کہ آخر دفعہ کے آغاز میں جو کچھ سر سے تعبیر ہوا تھا وہ اس دہے
اور نیز بموجب دفعہ ۴۲ مس لاد = مس اس جم ل اسی لاد دریافت ہوتا ہے
اور جم ل اس = جم س و جم لاد و جم س ب = جم س د جم ب د

$$\frac{\text{جم ل اس}}{\text{جم لاد}} = \frac{\text{جم س ب}}{\text{جم س د}} = \frac{\text{جم س ک}}{\text{جم س ل}} = \frac{\text{جم س ب}}{\text{جم ب د}}$$

اسی ب دیا ب دریافت ہوتا ہے

یہ ظاہری کہ دفعہ گذشتہ کی شروع میں جو کچھ سر سے تعبیر ہوا تھا وہ لاد ہے
(۸۵) دوزاوی اور ان میں لیک زاویہ کی مقابل کا ضلع (لاد و طا) معلوم ہیں
یہ صورت مشتبہ ہونی میں مشابہت صورت بالاسی کہتی ہی — ضلع طب تو اس صورت
جب طب = جب ب حب طا سی اور طس اور س مثلثات نیپری سی دریافت ہوتے ہیں
مس ل س = $\frac{\text{جم ل (طا - طب)}}{\text{جم ل (طا + طب)}}$ مم ل (ا + ب)
مس طس = $\frac{\text{جم ط (ا + ب)}}{\text{جم ط (ا - ب)}}$ مس ل (طا + طب)

ہم طب نی بالکل بی لگاؤ س اور طس کو دریافت کر سکتی ہیں اور اس طرح دریافت کر سکتی ہیں کہ وہ حساب
کو کاغذی کی قابلیت کہیں — اسو اسطی کہ

$$\text{جم ل} = \text{جم ب جم س} + \text{جم ب جب س جم طا}$$

$$= \text{جم ب (- جم س + مس ب جب س جم طا)}$$

فرض کرو کہ مم سر = مس ب جم طا پس

$$\text{جم ل} = \text{جم ب (- جم س + مس ب جم س مم سر)} = \text{جم ب جب (س - سر)}$$

$$\text{اسو اسطی جب (س - سر)} = \text{جم ل جب سر}$$

اس مساوات سی س - سے معلوم ہوتا ہے اور پھر اسی س دریافت ہوتا ہے چونکہ س - سے
اوسکی جیب سے دریافت ہوتا ہے اسلیئے شبہ یہ واقع ہوگا
اب پھر موافق دفعہ ۸۴ کے

مم ا جب ب = مم ط ا جب طس - جم طس جم ب = جم ب (جم طس + جم ط ا جب طس)
فرض کرو کہ مم بر = مم ط ا تو

مم ا جب ب = جم ب (جم طس + جم طس ا جب طس) = جم ب جب (طس - بر)
اسی واسطی جب (طس - بر) = مم ا مس ب جب بر

اس مساوات سی طس - سے دریافت ہوتا ہے اور پھر اسی طس معلوم ہوتا ہے چونکہ طس - سے
اوسکی جیب سے معلوم ہوتا ہے اسلیئے شبہ یہ ہو سکتا ہے - اگر ہم مثلث کی تحویل دو قائم الزاویہ
مثلثوں کی مجموعہ یا تفاوت کی طرف کریں تو نتائج مطابق ان نتائج کی پیدا ہوگی اس واسطی
کہ اگر مثلث اوس ب مین قوس س و عمود ا ب پر لگائی جائیں تو ب س د = بر اور ب د = بر
(۸۴) اب ہم اوس شبہ یہ بحث کرتے ہیں جو دفعہ ۸۴ کی صورت مین واقع ہوئی کہ دو ضلعی اور
ایں ضلعوں مین ہی ایک ضلع کا مقابل کا زاویہ معلوم ہو - اگرچہ اوسکی بحث طول طویل ہے
اور اس طاقت سی طبیعت کو طال ہوتا ہے مگر اوسین کچھ اشکال نہیں

اب ہم تمام صورت کو چھوڑ کر اول اوسکی ایک خاص صورت یعنی جبین ط ا = طب تو چاہا کہ ا ب
اور اول اور سوم تمثیلات نیچر ہی سے

مم ا طس = مس ا جم ط ا اور مس ا طس = مس ط ا جم ا

اب مم ا طس اور مس ا طس دونوں مثبت ہوں تاکہ ط ا اور ا م متعلقہ ہوں

اسی معلوم ہوا کہ جس وقت ط ا = طب تو کوئی حل نہ ہوگا اگر ا اور ط ا ہم صفت نہ ہوں

اس صورت مین ایک حل ہوگا الا اوس صورت مین کہ ا اور ط ا قائمی ہوں تو

مم ا طس اور مس ا طس کچھ متعلق نہ ہو سکتی اور وہ غیر محصور ہو جائیگا اور کوئی حل لاتعداد ہو جائیگا

اب ہم عام بحث کرتے ہیں

اگر جب ط ب اور بڑا جب ط اسی ہو تو کوئی مثلث اب نہیں ہوگا جو شرط معلوم ہو

پورا کریں۔ اگر جب ط ب اور بڑا جب ط اسی نہ ہو تو مساوات

جب ب = جب ط ب اور سی دو قیمتیں ب کی دریافت ہو گئیں

جنگو ہم صد اور صد سی تعبیر کرتی ہیں اس طرح کہ صد = کہ۔ صد اب ہم فرض کرتی ہیں کہ صد القیمت ہو جائے
دوسری قیمت سی بڑی نہیں ہے

اب ب کے ان قیمتوں کی دخل ہونی کی واسطی یہ بات ضروری کہ قیمتیں ہم ط س اور مس ط س
دونو مثبت ہوں اور فقط یہی بات کافی ہے یعنی ا ب اور ط ا۔ ط ب متحد العلالت بموجب دوم

وچہارم تمثیلات نیبری کے ہوں

اسیو ط اب ہم کو مقابلہ کرنا علامت ا۔ صد اور علامت ا۔ صد کا ط ا۔ ط ب کی مثلث سی باقی رہا

اب ہم فرض کرتی ہیں کہ ا قائم سی کم سی اور اسکی مطابق ہم اس بحث کو تین حصوں میں کرنا چاہتے ہیں
اول فرض کرو کہ ط ب کم بہ نسبت کم کے ہو

(۱) فرض کرو ط ا کم بہ نسبت ط ب کی ہی تو صورت قانونی جب ب = جب ط ب اور ا کی حکم سے

صد بڑا بہ نسبت ا کی ہوتا ہے تو صد بلکہ اولی بڑا اسی ہوگا۔ اسی معلوم ہوا کہ دخل ہیں

(۲) فرض کرو کہ ط ا برابر ہو ط ب کی تو ظاہری کہ صرف ایک حل ہوگا جبکہ پہلی بیان ہوا

(۳) فرض کرو کہ ط ا بڑا ط ب سی ہی تو ط ا + ط ب کم کے سی یا برابر کہ کی یا بڑا کہ سے ہوگا

اگر ط ا + ط ب کم بہ نسبت کہ کی ہی تو جب ط ا بڑی جب ط ب سی ہوگی پس صد چھوٹا بہ نسبت ا کی ہوگا

اسلی صد دخل ہو سکتا ہی اور صد بڑا اسی ہی اسلی وہ دخل نہیں ہو سکتا اسی معلوم ہوا کہ ایک

حل ہی۔ اگر ط ا + ط ب برابر کہ کی ہی تو صد برابر کہ کے ہوا اور صد بڑی اسی ہی اسلی دو

نہیں دخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

اگر ط ا + ط ب بڑا کہ سی ہی تو جب ط ا چھوٹا بہ نسبت جب ط ب کی ہوگا اور صد اور صد دونو بڑے

بہ نسبت Δ کے ہیں اور دونوں نہیں داخل ہو سکتی اسی ثابت ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

دوم فرض کرو کہ طب برابر کچ کے ہے

(۱) فرض کرو کہ Δ کم بہ نسبت طب کی ہی تو صہ اور صہ دونوں بڑی بہ نسبت Δ کی ہوئی اور دونوں

داخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ دو حل ہیں

(۲) فرض کرو کہ Δ برابر طب کی ہو تو کوئی حل نہ ہوگا جیسا کہ پہلی ثابت کیا ہے

(۳) فرض کرو کہ Δ بڑا طب سی ہی توجب Δ چھوٹا جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونوں بڑی

بہ نسبت Δ کی ہیں اور دونوں نہیں داخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

سوم فرض کرو کہ طب بڑا کچ سے ہو

(۱) فرض کرو کہ Δ چھوٹا بہ نسبت طب کی ہو تو $\Delta +$ طب کیا چھوٹا یا برابر بڑا کہ سی ہوگا

توجب Δ چھوٹا جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونوں بڑی اسی ہیں اور دونوں داخل ہو سکتی ہیں

اسی دو حل ہوئی

اگر $\Delta +$ طب برابر کچ کی ہی تو صہ برابر Δ کی ہی اور داخل نہیں ہو سکتا اور صہ بڑا بہ نسبت Δ کے

اسی داخل ہو سکتا ہی نہی ثابت ہوا کہ ایک حل ہی — اگر $\Delta +$ طب بڑا کہ سی ہی تو

جب Δ بڑا جب طب سی اور صہ چھوٹا اسی ہی اور داخل نہیں ہو سکتا اور صہ بڑا اسی ہی اسی

داخل ہو سکتا ہی اسی معلوم ہوا کہ ایک حل ہے

(۲) فرض کرو کہ Δ برابر طب کی ہو تو پہلی ثابت کرائی ہیں کہ کوئی حل نہیں ہوگا

(۳) فرض کرو کہ Δ بڑا طب سی ہی توجب Δ چھوٹا جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونوں بڑی

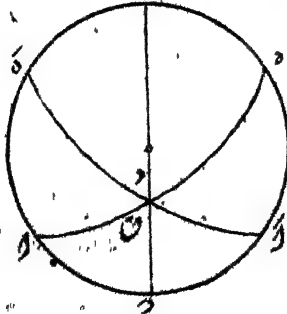
اسی ہیں اور دونوں نہیں داخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

پس نتائج مفصلہ ذیل ہم کو حاصل ہوئی اگر Δ چھوٹا ایک قائمہ سے ہو

جب Δ بڑا بہ نسبت قائمہ کے ہے	
ط Δ ط یا ط = ط	کوئی حل نہیں
ط Δ ط اور ط + ط = ک	ایک حل
ط Δ ط اور ط + ط = ک	دو حل
ط Δ ط یا ط = ط	کوئی حل نہیں
ط Δ ط	دو حل
ط Δ ط اور ط + ط = ک	ایک حل
ط Δ ط اور ط + ط = ک	کوئی حل نہیں
ط = ط	ایک حل
ط Δ ط	دو حل

یہاں پہلی ہی بات ہی جو اوپر لکھی آئی ہیں کہ جہاں دو حل ہیں مان کوئی حل نہ ہوگا اگر جب ط کم جب ط جب اسی نہ ہوگی اوپر کی تحقیقات سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ اگر ط درمیان ط اور ک۔ ط کی واقع ہو تو ایک حل ہوگا اگر ط درمیان ط اور ک۔ ط کی نہیں واقع ہوتا تو کیا تو کوئی حل نہ ہوگا یا دو ہوں گی اور یہاں دعویٰ میں وہ صورتیں داخل نہیں جنہیں ط = ط یا = ک۔ ط

(۸۷) سب نتائج جو اوپر بیان ہوئے وہ اس شکل سے بیان ہو سکتے ہیں



جو اس اور قاعدہ کی لفظ وسط میں ملائی جائے

(۵) اگر ط اور طب اور طس معلوم ہوں اور طس ربع محیط ہو تو زاویہ دریافت کرو اور یہی

ثابت کرو کہ اگر ہر عمود طس پر مقابل کی زاویہ سی لگا لگا کر تو حجم ہر = حجم ط + حجم طب

(۶) اگر ایک مثلث کروئی کا ایک ضلع چار برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور سر اور سر دوم و سر سوم

زاویہ بالترتیب انکی سامتی مقابل کی زاویہ ہر ہون تو ثابت کرو کہ

جب (۱ + ۲) جب ۳ جب ۴ = جب (۳ + ۴) جب ۱ جب ۲

(۷) اگر کروئی مثلث میں ۱ = ب = ۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

۸ جب (ط + طس) جب طس ۴ = جب طس ۴

(۸) اگر مثلث کروئی میں ۱ = ب = ۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

۸ جب ۱ (۱ + ۲) جب ۳ = ۱

(۹) اگر مثلث مساوی الساقین ۱ ب س کے مساوی قوس دیسی تنصیف کی جائیں اور

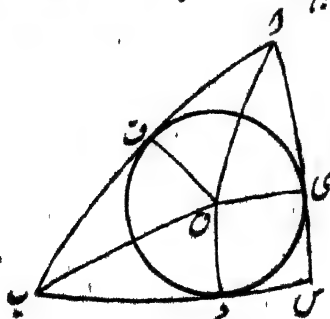
ب س قاعدہ ہو تو ثابت کرو کہ جب دیسی = ۱ جب ۱ ب س قس ۱ ب س

(۱۰) اگر ط اور ط اور ط معلوم ہوں اور طس ۱ قس ۱ ب س کی قیمتیں ہوں اور مثلث

تو ثابت کرو کہ مس ۱ ب س ۱ ب س ۲ = مس ۱ (ط - ط) مس ۱ (ط + ط)

باب ہفتم مثلث کی اندرو باہر جو دائری بنائی جائیں

(۱۱) ایک مثلث میں جو چھوٹا دائرہ بنا یا جائے اس کا نصف قطر قوسی دریافت کرو



فرض کرو کہ اب س مثبت ہی زوایا اور ب کی قوسوں میں نصف کرو جو نقطہ ق بر طس اور نقطہ ق سی و د اور ق سی اور ق ف محمود ضلع پر نکالو۔ تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق و اور ق سی

اور ق ف سب اسپین برابر ہیں اور نیز ای = اف اور ب ف = ب د اور س د = س سی

اسی معلوم ہوا کہ ب س + اف = نصف مجموعہ ضلع = م اسپو اسطی اف = ص - طا

فرض کرو کہ ق ف = بق اب مس ق ن = مس ق اف جب اف بموجب دفعہ ۲ کے

پس مس بق = مس اف جب (م - طا) (۱)

قیمت مس بق کی مختلف شکلوں میں بیان ہو سکتی ہے اس طرح سی کہ دفعہ ۱ کی موافق ہم کو حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس بق} = \frac{\text{جب (م - طس)} \times \text{جب (م - طا)}}{\text{جب م جب (م - طا)}}$$

اس قیمت کے مساوات (۱) میں رکھو تو

$$\text{مس بق} = \frac{\text{جب (م - طا) جب (م - طس) جب (م - طا)}}{\text{جب (م - طا) جب (م - طس) جب (م - طا)}} \quad (۲)$$

پھر جب (م - طا) = جب [(طس + طس) - (طا)]

$$= \text{جب } \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طس}) \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طا} - \text{جم } \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طس}) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ طا}$$

$$= \text{جب } \frac{1}{2} \text{ طا جم } \frac{1}{2} \text{ طا} - \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س}) - \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س}) \quad (\text{دفعہ ۳})$$

$$= \text{جب طا جب } \frac{1}{2} \text{ ب جب } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$\text{اسیو اسطی (۱) سی مس بق} = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ ب جب } \frac{1}{2} \text{ س جب طا} \quad (۳)$$

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۱ کے

$$\text{مس بق} = \frac{\text{جم م جم (م - ۱) جم (م - ب) جم (م - س)}}{\text{جم م جم (م - ۱) جم (م - ب) جم (م - س)}}$$

$$= \text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا جم } \frac{1}{2} \text{ ب جم } \frac{1}{2} \text{ س}$$

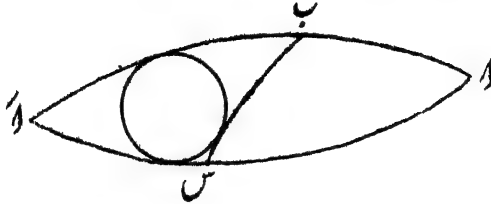
$$= \text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا جم } \frac{1}{2} \text{ ب جم } \frac{1}{2} \text{ س} \quad (۴)$$

یہ صورت علم مثلی معمولی ہی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا جم } \frac{1}{2} \text{ ب جب } \frac{1}{2} \text{ س} = \text{جم م} + \text{جم (م - ۱) + جم (م - ب) + جم (م - س)}$$

اسی (ن) سے معلوم ہوتا ہے

مم لقی = $\frac{1}{2} \{ \text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-ن)} \} \dots (۵)$
 (۴۰) اوس بیہوشی داسرہ کا نصف قطر قوسی دریافت کرو جو مثلث معلوم کی ایک ضلع اور دوسری ضلع خارجہ
 مس کرتا ہو



فرض کرو کہ اب س مثلث ہی اور ہم کو منظور یہ ہے کہ نصف قطر قوسی اوس داسرہ خورد کا قوس کین
 جو ب س کو اور اب اور اس ضلع شدہ کو مس کرتا ہے
 اب اور اس کو خارج کر کی اوسر ملاؤ پس اب بہم مطلوب ہی کہ نصف قطر داسرہ خورد کا جو مثلث
 اب س میں بنایا جاوے دریا کرین اور ضلع مثلث اب س کی طا اور کہ - طب اور کہ - طس میں
 پس ہی ثابت ہوا کہ اگر نصف قطر قوسی تعبیر کرین اور $\frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})$ کو م سی
 تو بموجب دفعہ ۸۹ کے ہم کو بہم حاصل ہوگا کہ

مس لقی = مس $\frac{1}{2}$ جب م (۱)

اس سی ہم اور صور ساویہ دفعہ گذشتہ کی طرح نکال سکتی ہیں اور ہم اوں صورتوں کا
 استعمال کرتی ہیں جو مثلث اب س کی زاویہ اور کہ - ب اور کہ - س سی پیدا ہوتی ہیں
 اسی معلوم ہوا کہ $\frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})$ تعبیر م سی اور $\frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب} + \text{س})$ تعبیر م سی ہوتا ہے تو ہم کو حاصل ہوگا کہ

مس لقی = $\frac{\text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ن)}}{\text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-ن)}} \dots (۲)$
 جب م - طس لقی = $\frac{\text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)}}{\text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-ن)}} \dots (۳)$

مس لقی = $\frac{\text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)}}{\text{جم م} + \text{جم (م-ا)} + \text{جم (م-ب)} + \text{جم (م-ن)}} \dots$

(۴)

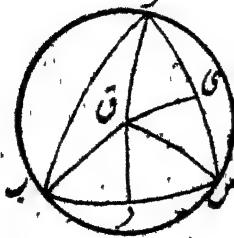
= حجم $\frac{1}{6}$ جب $\frac{1}{6}$ ب جب $\frac{1}{6}$ س

محم نقی = $\frac{1}{6}$ { حجم $\frac{1}{6}$ - حجم $\frac{1}{6}$ (آ - ۱) + حجم $\frac{1}{6}$ (ب - آ) + حجم $\frac{1}{6}$ (س - آ) } (۵)
 بغیر ان باتوں کی یہی نتیجی حاصل ہو سکتی ہیں اگر دو زاویہ مثلث Δ ب س کو تضییع کریں اور
 اسی قطب دائرہ خورد کا معین کریں اور دفعہ ۸۹ کی طرح عمل کریں

(۹۱) ایک دائرہ جو مثلث کی ایک ضلع کو اور دو اضلاع خارج شدہ کو مس کرتا ہی اوسے
 دائرہ خارجی کہتے ہیں پس مثلث معلوم کی تین دائری خارجی ہو سکتی ہیں
 جو دائری اضلاع س Δ اور س ب کو مس کرتی ہیں اور انکی نصف قطرون کو لوقہ اور لوقہ
 سی تعمیر کرو تو قسٹین لوقہ Δ اور لوقہ س کی زاویوں اور اضلاع کی حروف تبدیل کرنی سے
 اوسطی طرح دریافت ہو جائیگی جس طرح لوقہ معلوم ہوا تھا

دفعہ گذشتہ میں مثلث Δ ب س اضلاع Δ ب اور Δ س کی خارج کرنی سی اور انکو نقطہ Δ سپر
 سی پیدا ہوا تھا علیٰ ہذا القیاس ایک مثلث اسطرح ب س اور ب Δ کی خارج ہونی سی پیدا ہوتا ہی
 اور اسطرح ایک اور مثلث س Δ اور س ب کی خارج ہونی سی بنا ہی غرض اصل مثلث اور تین مثلث
 جو اسطرح پیدا ہوئی مثلثات متفقہ کہلاتی ہیں اور Δ ب س کو اصلی مثلث کہتے ہیں۔ پس اسطرح
 مثلث معلوم کی اندرونی اور خارجی دائری دی ہوئی جو مثلثات متفقہ کی (جبکہ اصلی مثلث
 مثلث معلوم ہو) اندرونی اور خارجی دائری ہیں

(۹۲) ایک مثلث معلوم پر جو دائرہ اصغر بنا یا جائی اوسکا نصف قطر قوسی دریافت کرو



فرض کرو کہ Δ ب س مثلث معلوم ہی اضلاع س ب اور س Δ کی نقاط داوری پر تضییع کرو

اور دائری سی قوسین محمود س ب اور س ا ب پر کھینچو اور فرض کرو کہ ق ا ن قوسوں کا لفظ
تقاطع ہی توفی قطب دائرہ اصغر کا ہوگا جو ا ب س کی اوپر بنا یا جائی ق ا اور ق ب ا اور
ق س کھینچو تو مثلث قائم الزاویہ ق س ا اور ق ب س دائری ق س ب = ق س
اور مثلث قائم الزاویہ ق س ا اور ق ا س ہی ہیہ مستط ہوتا ہی کہ ق ا = ق س
اسی ثابت ہوا کہ ق ا = ق ب = ق س اور نیز زاویہ ق ا ب = زاویہ ق ب ا
اور زاویہ ق ب س = زاویہ ق س ب اور زاویہ ق س ا = زاویہ ق ا س
اسی واسطی ق س ب + ق س ا = ق س (ا + ب + س) اور ق س ب = ق س - ا
فرض کرو کہ ق س = نص

ا ب س د = مس ق س ق جم ق س د بموجب دفعہ ۴۲ کے

پس مس ق س = مس نص جم (ص - ا)

اسی واسطی مس نص = مس ق س ق جم (ص - ا) (۱)

قیمت مس نص کی بہت سی صورتوں میں بیان ہو سکتی ہی اگر دفعہ ۴۹ کی موافق قیمت س ب ق
کے رکھیں تو بہت حاصل ہوگا کہ

مس نص = جم (د - ا) جم (د - ب) جم (د - س) = جم (د - س) جم (د - ب) جم (د - ا) (۲)

اور جم (د - ا) = جم (د - ب) جم (د - س) = جم (د - س) جم (د - ب) جم (د - ا)

جم (د - ب) جم (د - س) = جم (د - س) جم (د - ب) جم (د - ا)

جم (د - ب) جم (د - س) = جم (د - س) جم (د - ب) جم (د - ا)

جم (د - ب) جم (د - س) = جم (د - س) جم (د - ب) جم (د - ا)

اسی واسطی (۱) کے

جم (د - ب) جم (د - س)

مس نص = جم (د - ب) جم (د - س) (۳)

اندر جملہ میں قیمت جب ا کی دفعہ ۴۹ کے موافق رکھو تو

باب ہفتم ثلث اندر و باہر جو دائری بنائی جائیں

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)}} \\ = \sqrt{\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)}} \quad (۴)$$

صور علم مثلثی دروجہ سی یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)} = \text{جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)} - \text{جب م}$$

اسے ہم (۴) سے یہ حاصل کرتے ہیں کہ

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\text{جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)} - \text{جب م}} \quad (۵)$$

(۹۳) نصف قطر قوسی دوائر صغریٰ جو گرد مثلثات متفقہ کی جہاں اصلی مثلث معلوم ہی دریافت کرو فرض کرو کہ نص نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو اوس مثلث میں بنائیں کہ اب اور اس کے خارج ہونے اور نقطہ پیر پٹی سی پیدا ہوتا ہی اور دو اور مثلث جو سطح بنائی جائیں اور ان کی اندر دائری بنائی جائیں ان کی نصف قطروں کو لصل م اور لصل م سے تغیر کرو

تو ہم جمعی مس لصل اور مس لصل م اور مس لصل م موافق دفعہ ۹۲ کی اسی طرح معلوم کر سکتی ہیں جس طرح کہ مس لصل دریافت کیا تھا اسی طرح مثلث اب س کی طا و کہ - طب اور کہ - طس اور زاوی اوس کی اور کہ - ب اور کہ - س ہیں اور م = $\frac{1}{2} (طا + طب + طس)$ اور

$$ح = \frac{1}{2} (ا + ب + س) \text{ تو اب ہم کو دفعہ ۹۲ کے موافق یہ حاصل ہوگا}$$

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\frac{\text{مس لصل}^2}{\text{جم ح}}} \quad (۱)$$

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\frac{\text{جم ح} - (ا - ح)}{\text{جم ح} - (ب - ح) - (س - ح)}} \quad (۲)$$

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\frac{\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)}}{\text{جم ح}}} \quad (۳)$$

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\frac{\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)}}{\text{جم ح}}} \quad (۴)$$

$$\text{مس لصل} = \sqrt{\frac{\text{جب م جب (م-طا) جب (م-طب) جب (م-طس)}}{\text{جم ح}}} \quad (۵)$$

اور علیٰ ہذا القیاس جملے ل^۱ اور ل^۲ کے واسطی دریافت کر سکتی ہیں
(۹۴) بہت سی مثالیں ایسی بن سکتی ہیں کہ جن میں خواص مثلثات متفقہ کی دوا سراندرونی اور
بیرونونی کی مسائل ہوں مگر ہم اوں میں سے ایک لکھتی ہیں وہ ایندہ کام اینگی
ثبات کرو کہ

$$(م م ل^۱ + م ل^۲) = \frac{1}{2} (ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳) - ۱$$

ہم کو معلوم ہے کہ

$$۱ = ۱ - ج ط^۱ - ج ط^۲ - ج ط^۳ + ج ط^۱ + ج ط^۲ + ج ط^۳$$

اسی واسطی

$$(ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳) - ۱ = ۱ - ج ط^۱ - ج ط^۲ - ج ط^۳ + ج ط^۱ + ج ط^۲ + ج ط^۳$$

$$۲ = (۱ + ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳ + ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳) - ج ط^۱ - ج ط^۲ - ج ط^۳$$

اور نیز م ل^۱ + م ل^۲ = $\frac{1}{2} (ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م)$
طرفین مساوات منجز کر کرنی سی نتیجہ مطلوبہ حاصل ہو جائیگا اس واسطی کہ اختصار کرنے سے
یہ ثابت ہوگا کہ

$$ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م = ۲ - ج ط^۱ - ج ط^۲ - ج ط^۳ + ج ط^۱ + ج ط^۲ + ج ط^۳$$

$$اور ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م = (ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م)$$

$$+ ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م = (ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م)$$

$$= ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳ + ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳$$

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$(م م ل^۱ + م ل^۲) = \frac{1}{2} (ج ب ط^۱ + ج ب ط^۲ + ج ب ط^۳) - ۱$$

(۹۵) دفعہ ۸۹ کی شکل میں فرض کرو کہ دق نقطہ ایک ایسا خارج کیا جائی کہ دایہ دائرہ

تو دایہ قطب بنی گا ہوگا اور دق = $\frac{1}{2} (ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م + ج ب م)$ اور اسی طرح فرض کرو کہ دق نقطہ دق

نقطہ ب تک ایسا خارج کیا ہی کہ بی ب رجب ہو اور ق ق نقطہ ق سے س تک ایسا خارج
 کیا جا کہ ق س رجب ہو تو مثلث ا ب س قطبی مثلث ا ب س کا ہوگا
 اور ق ا = ق ب = ق س = ک۔ لہٰذا ق ق قطب اوس صغیر دائرہ کا ہو جو مثلث قطبی کے
 گرد کھینچا جا اور نصف قطر قوسی دائرہ خورد کا جو مثلث قطبی کی گرد کھینچا جا می تھا می اوس دائرہ خورد
 کی نصف قطر قوسی کی ہو تا ہی جو اس مثلث پر کھینچا جا می۔ اوس طرح سی ثابت ہو تا ہی کہ نقطہ قطب
 دائرہ خورد کا کہ مثلث قطبی میں بنا یا جا می ہو وہ قطب اوس دائرہ خورد کا ہو تا ہی جو اصلی مثلث
 گرد اوپر بنا یا جا می اور نصف قطر قوسی دو نو دائروں کی باہم متمم ہیں

امثلہ

جو رقموں کا طریقہ کتابت اس باب میں ہی وہی ان مثالوں میں ہے
 ثابت کرو کہ پہلی مثال سی با پنجویں مثال تک ہر مثلث میں یہ تعلقات ہوں گے

$$(۱) \text{ مس لقی ۱ مس لقی ۲ مس لقی ۳ = مس لقی جیبام}$$

$$(۲) \text{ مس لقص ۱ + مم لقی ۲ = مس لقص ۲ + مم لقی ۱}$$

$$= \text{مس لقی ۳ + مم لقی ۲} = \frac{1}{2} (\text{مم لقی ۱ + مم لقی ۲ + مم لقی ۳})$$

$$(۳) \text{ مس لقص ۱ + مس لقص ۲ + مس لقص ۳ = مم لقی ۱ + مم لقی ۲ + مم لقی ۳}$$

$$(۴) \text{ مس لقی ۱ + مس لقی ۲ + مس لقی ۳ = مم لقی ۱ + مم لقی ۲ + مم لقی ۳}$$

$$(۵) \text{ مس لقص ۱ + مس لقص ۲ + مس لقص ۳ = مس لقص ج}$$

$$(۶) \text{ مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ مس لقص ۲ = مس لقی}$$

(۷) اگر ا ب س ایک مثلث کرو می ہو اور دائرہ جو او س کی اوپر بنا یا جا اوس کا ق قطب ہو اور
 ک کو می نقطہ کرہ پر ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ک د + جم ک ب + جم ک س = جم ج ق و جم ق ک}$$

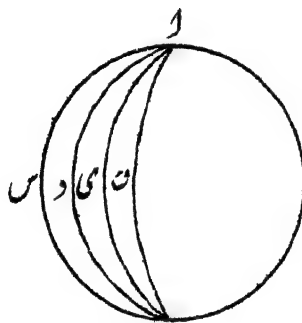
(۸) ایک مثلث کرومی کا سرکہ زاویہ ۲۰° ہے اور اس کی اندر تین دائری دوائر دیا گیا ہے اور مثلث کی دو ضلعوں کو مس کرتی ہوئی گینچ گئی ہیں تو ثابت کرو کہ نصف قطر سر دائرہ خور کا = ۳۰° اور مرکز تین دوائر خور کی منطق مثلث قطبی کی زاویوں کی نقاط پر ہونگے

باب ہشتم

مثلث کرومی کا رقبہ اور ازاد کردہ

(۹) رقبہ شکل ہلالی کا دریافت کرو

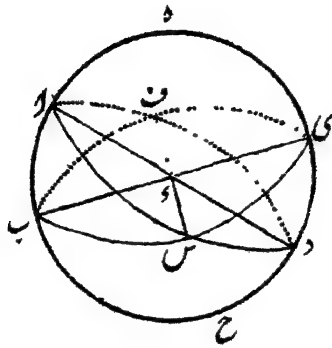
شکل ہلالی یا ہلال کرہ کی سطح مستدیر کی اوس حصہ کو کہتی ہیں جو دو نصف دوائر عظیم کے درمیان واقع ہو



فرض کرو کہ اس ب د اور اد بی دو ہلال ہیں جنکی زاویں برابر ہیں یہی مسئلہ ہے جب ایک ہلال کو دوسرے ہلال پر منطبق کریں تو وہ بالکل منطبق ہو جائینگے پس اسی ثابت ہوا کہ ہلال جنکی زاویں برابر ہیں برابر ہوتی ہیں اگر وہی عمل کریں جو اقلیدس کے چہٹی مقالہ میں کیا گیا ہے تو ثابت ہوگا کہ ہلال متناسب اپنی زاویوں کی ہوتی ہیں پس اسی معلوم ہوا کہ تمام سطح مستدیر کرہ کو ایک ہلال خیال کر سکتی ہیں جسکا زاویہ برابر چار قائمون کی ہے پس جس ہلال کا زاویہ ایسا ہو گا اسکا مقیاس قوسی وہی نوہم کو بیہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{رقبہ ہلال}}{\text{سطح مستدیر کرہ}} = \frac{\text{زاویہ}}{۳۶۰}$$

فرض کرو کہ نصف قطر کرہ کا ہی نوہم چوب (باب ہفتم کلیات) کی رقبہ سطح مستدیر کرہ کا ہر ایک ہوگا پس رقبہ ہلال کا = $\frac{۱}{۱۰}$ کہ نو = $\frac{۱}{۱۰}$ نو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث کرومی ہی قوسوں کو جو مثلث کی ضلعی بنائی ہیں خارج کرو کہ دور
 او نہیں ہی دودو اسپین ملین جبا و نہیں ہی ہر یک نصفیں جائیگی تو یہہ لاپ ضرور قطع ہو جائیں گے
 ا ب د س ا اور ب س ی ا ب اور س ا ف ب س کا ایک حصہ مثلث ا ب س ہے
 اب مثلث س دی اور ا ف ب زوایا محاسبہ مقابلہ کی محاذی واقع ہیں اسلی ہی ہم اوسکے
 رقبی اسپین برابر خیال کر سکتی ہیں اسبواسطی ہلال س ا ف ب س برابر مجموعہ مثلثات ا ب س
 اور س دی کی ہی اسی ثابت ہوا کہ اگر ا و ب د س مثلث کی زاویوں کی مقیاس قوسی کو
 تعبیر کریں تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مثلث ا ب س} + \text{ب ج د س} = \text{ہلال ا ب د س} = ۱۲۰ \text{ لقی}$$

$$\text{مثلث ا ب س} + ۱۵۰ \text{ می س} = \text{ہلال ب س ی ا ب} = ۲۰ \text{ لقی}$$

$$\text{مثلث ا ب س} + \text{مثلث س دی} = \text{ہلال س ا ف ب س} = ۲۰ \text{ لقی}$$

پس جمع کرنے سے

$$\text{دو چند مثلث ا ب س} + \text{سطح مستدیر نصف کرہ} = ۲ (۱ + ب + س) \text{ لقی}$$

$$\text{اسبواسطی مثلث ا ب س} = (۱ + ب + س) \text{ لقی}$$

اس جملہ 1 + ب + س - ک کو زیادتی یا زیادہ مثلثی کہتی ہیں اور چونکہ

$$(1 + ب + س - ک) \text{ کو } 2 = \frac{1 + ب + س - ک}{2} \times 2 \text{ کو } 2$$

پس یہ نتیجہ یوں بیان ہوتا ہے کہ رقبہ مثلث کروی کا نصف کرہ کی سطح مستدیر کا ایسا حصہ ہوتا ہے جیسا کہ از دیہ کروی حصہ چار قاعوں کا ہوتا ہے

(۹۸) ہم نے اوپر کی دفعہ میں معمول کی موافق یہ فرض کر لیا ہے کہ مثلث س دی اور ان ب ا ب میں برابر ہیں لیکن ا و میں مساوات انطباق نہیں ہے یعنی وہ مساوات نہیں ہے کہ تطبیق سے وہ ایک دوسرے میں مطبق ہو جائیں لیکن ا و نہیں مساوات بالقرینہ ہی یعنی مثلثوں کی ایسی ٹکڑی ہو سکتی ہیں کہ اگر ان کو باہم چسپاں کریں تو وہ بالکل مطبق ہو جائیں اب ایسی ٹکڑی سطح ہو سکتی ہیں کہ ہر مثلث کی گرد اسرہ بنائیں تو نصف قطر قوسی ان دائروں کے بموجب دفعہ ۸۹ کی برابر ثابت ہو سکتی ہے اگر قطب اسرہ بیرونی کا ہر مثلث کی اندر واقع ہوتا تو ہر مثلث مجموعہ تین مثلث متساوی اساقین کا ہوگا

اور اگر قطب مثلث سی باہر واقع ہوتا ہے تو ہر مثلث تفاوت ایک مثلث متساوی اساقین اور مجموعہ دو متساوی اساقین مثلثوں کا ہوگا اور یہ مثلث متساوی اساقین ایک مجموعہ کے موافق اپنی اپنی نظیر کے برابر دوسرے مجموعہ کی متساوی اساقین مثلثوں کی ہونگے

(۹۹) کثیر الاضلاع کروی کا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ن تعداد اضلاع کثیر الاضلاع کی ہے اور ص مجموعہ تمام زاویوں کا ہی کثیر الاضلاع کی اندر کوئی نقطہ مقرر کر کے سب زاویوں کی تقطیوں میں خطا اٹھاتو اس طرح کثیر الاضلاع ن مثلثوں میں تقسیم ہوگی پس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۸ کی رقبہ کثیر الاضلاع = (مجموعہ مثلثوں کے زاویوں کے) کی

اور مجموعہ مثلثوں کی تمام زاویوں کا ص مع چار قاعوں کی ہی یہ چار قاعی راس مشترک ہر سب زاویہ راس کی پیدا کرتی ہیں

اسی واسطی رقبہ کثیر الاضلاع = { ص - (ن - ۲) ک } کو

باب ششم
یہ جملہ اون کثیر الاضلاعوں کی واسطی ہی درست ہی اگر کسی بعض زاویوں میں سی ہر ایک دو قائمہوں
سی ہر ایک ہر ایک کی وہ مثلثوں میں اس طرح تحلیل ہو سکتی ہو کہ ہر ایک ایسی مثلث کا دو قائمہوں سی کم ہو
(۱۰۰) اب مثلث کی از دیاد کروئی کہ بعض خاص علم مثلثی جملی بیان کرتی ہیں اور مثلث کی از دیاد
کروئی کو زسی تعبیر کرتی ہیں اس طرح کہ ز = ۱ + ب + س - کہ

(۱۰۱) بیگ نول حصہ کا ضابطہ - ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ ز} = \frac{\text{جب م جب (م - طا) جب (م - طب) جب (م - طس)}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ طا جم } \frac{1}{2} \text{ طب جم } \frac{1}{2} \text{ طس}}$$

$$\begin{aligned} \text{جب } \frac{1}{2} \text{ ز} &= \text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب + س - ک) = \text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب) - \frac{1}{2} (ک - س) \\ &= \text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب) \text{ جب } \frac{1}{2} س - \text{جم } \frac{1}{2} (۱ + ب) \text{ جم } س \\ &= \text{جب } \frac{1}{2} س \text{ جم } \frac{1}{2} س \left\{ \text{جم } \frac{1}{2} (طا - طب) - \text{جم } \frac{1}{2} (طا + طب) \right\} \text{ بموجب دفعہ ۵۶ کے} \\ &= \text{جب } \frac{1}{2} \text{ طا جب } \frac{1}{2} \text{ طب} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس}}{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ طا جب } \frac{1}{2} \text{ طب}} \text{ جب م جب (م - طا) جب (م - طب) جب (م - طس)}$$

$$= \frac{\text{جب م جب (م - طا) جب (م - طب) جب (م - طس)}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ طا جم } \frac{1}{2} \text{ طب جم } \frac{1}{2} \text{ طس}}$$

(۱۰۲) ہولیر کا ضابطہ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} \text{مس } \frac{1}{2} \text{ ز} &= \frac{\text{[مس } \frac{1}{2} \text{ م مس } \frac{1}{2} (م - طا) مس } \frac{1}{2} (م - طب) مس } \frac{1}{2} (م - طس)]}{\text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب + س - ک)} \\ &= \frac{\text{جم } \frac{1}{2} (۱ + ب + س - ک)}{\text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب) - \text{جب } \frac{1}{2} (ک - س)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{جم } \frac{1}{2} (۱ + ب) - \text{جم } \frac{1}{2} (ک - س)}{\text{جب } \frac{1}{2} (۱ + ب) - \text{جب } \frac{1}{2} (ک - س)} \\ &= \frac{\text{جم } \frac{1}{2} (۱ + ب) + \text{جب } \frac{1}{2} س}{\text{جم } \frac{1}{2} (۱ + ب) + \text{جب } \frac{1}{2} س} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{جم } \frac{1}{2} (طا - طب) - \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس}}{\text{جب } \frac{1}{2} (طا + طب) + \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طس}} \text{ بموجب دفعہ ۵۶}$$

پس سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مس} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})}{\text{مس} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})} \cdot \frac{\text{جب} \frac{1}{2} \text{م} (\text{طس})}{\text{جب} \frac{1}{2} \text{م} (\text{طس})} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} \text{م} (\text{طس})}{\text{جب} \frac{1}{2} \text{م} (\text{طس})}$$

(۱۰۳) منت کی اوزار وادی کی لمبی اور پست سی صورتانہ جن میں متعلقہ جہات ہوں۔ دریا پوری ہے۔ مثلاً

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب}) - \frac{1}{2} (\text{ک} - \text{س})$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب}) + \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب}) = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) + \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب}) = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} \quad (\text{دفعہ ۵۴})$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس} \quad (۱)$$

دفعہ ۱۰۱ میں ثابت ہوا تھا کہ

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$\text{اسی واسطی} \quad \text{مس} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس} \quad (۲)$$

اور یہ ہم کو اوپر سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$= \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس} \quad (۳)$$

(۳) میں ۱-۲ جیسا کہ ز کے لگھو تو

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$\text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} = \text{جب} \frac{1}{2} \text{س} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طا} + \text{جب} \frac{1}{2} \text{طب} \quad \text{قط} \frac{1}{2} \text{طس}$$

یہ دونوں طریقہ ثابت کر سکتی ہیں کہ شمار کنندہ اس کے برابر ہے

$$\begin{aligned} & \text{جیب } \frac{1}{2} \text{ م جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طا) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طب) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طس)} \\ & \text{جیب } \frac{1}{2} \text{ ز} = \frac{\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ م جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طا) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طب) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طس)}}{\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس}} \end{aligned}$$

اور علی هذا القیاس

$$\begin{aligned} & \text{جیب } \frac{1}{2} \text{ ز} = \frac{\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ م جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طا) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طب) جیب } \frac{1}{2} \text{ (م - طس)}}{\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس}} \\ & \text{تقسیم کرنے سے ہم کو ضابطہ یوں لے کر حاصل ہوگا} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{بہر جیب (س - ز) = جیب س م م ز - جیب س} \\ & \text{جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \\ & \text{جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} = \text{م م } \frac{1}{2} \text{ طا م } \frac{1}{2} \text{ طب} \end{aligned}$$

اسی واسطی بموجب دفعہ ۱۰ اس کے

$$\begin{aligned} & \text{جیب (س - ز) = } \left\{ \frac{\text{جیب م جیب (م - طا) جیب (م - طب) جیب (م - طس)}}{\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس}} \right\} \\ & \text{بہر جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \\ & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \\ & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \\ & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \\ & \text{جیب (س - ز) = جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ ز جیب س جیب } \frac{1}{2} \text{ طا جیب } \frac{1}{2} \text{ طب جیب } \frac{1}{2} \text{ طس} \end{aligned}$$

اس نتیجہ سے ہم دو اور نتیجہ اس طرح مستط کر سکتے ہیں جیلج (۴) (۵) کو (۳) سے مستط کیا ہوتا
جانب راست (۴) کی اس طرح ہی حاصل ہو سکتی تھی کہ (۳) کی جانب راست میں طا اور طب کی
جگہ ک - طا اور ک - طب رکھیں اس طرح نتائج نہایت آسانی سے حاصل ہو جائیں گے

ہم کو یہ حاصل ہے

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ م } \frac{1}{2} \text{ (م-طا) جب } \frac{1}{2} \text{ (م-طب) جب } \frac{1}{2} \text{ (م-طس)} \\
\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (س-ز)} = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ طا جب } \frac{1}{2} \text{ طب جب } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ م } \frac{1}{2} \text{ (م-طا) جب } \frac{1}{2} \text{ (م-طب) جب } \frac{1}{2} \text{ (م-طس)} \\
\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (س-ز)} = \text{جب } \frac{1}{2} \text{ طا جب } \frac{1}{2} \text{ طب جب } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

مثالین

(۱) اضلاع اور زاویوں میں مثلث متساوی الاضلاع کی دریا کر دو حصار قبہ ایک چوتھائی سطح مسدیر
 اوس کرہ سے ہو جس پر وہ بنایا گیا ہے

(۲) ایک کثیر الاضلاع کرومی مساوی الاضلاع اور مساوی الزواہان اضلاع کی ہی
 تو بتاؤ ہر ایک زاویہ کی کیا مقدار ہوگی اگر قبہ اوس کا نصف سطح مسدیر اوس کرہ سے ہو جس پر وہ بنایا گیا ہے

(۳) اگر طا = طب = کپ اور طس = کپ تو ثابت کرو کہ ز = جم = $\frac{1}{4}$

(۴) اگر مثلث کرومی کا زاویہ س قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{1}{2}$ ز = جب $\frac{1}{2}$ طا جب $\frac{1}{2}$ طب قسط $\frac{1}{2}$ طس اور جم $\frac{1}{2}$ ز = جم $\frac{1}{2}$ طا جم $\frac{1}{2}$ طب قسط $\frac{1}{2}$ طس
 (۵) اگر زاویہ س قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{1}{2}$ طس = جم ز = جب $\frac{1}{2}$ طا + جب $\frac{1}{2}$ طب
 جب $\frac{1}{2}$ طس = جم $\frac{1}{2}$ طا جم $\frac{1}{2}$ طب

(۶) اگر طا = طب اور س = کپ ثابت کرو کہ مس ز = جب $\frac{1}{2}$ طا

(۷) مثلث قائم الزاویہ کی زاویوں کا مجموعہ چار قائمہوں سے کم ہوتا ہے

(۸) مثلث کرومی کی ایک ضلع میں نقطہ معلوم سی ایک قوس ایسی کہ جو کہ مثلث میں سی ایک حصہ معلوم قطع کرو

(۹) اگر مثلث کرومی کی زاویہ س ہلکے برابر چار قائمہوں کے ہوں تو

جم $\frac{1}{2}$ طا + جم $\frac{1}{2}$ طب + جم $\frac{1}{2}$ طس = ۱

(۱۰) اگر قی و قی و قی نصف قطر میں دو اسر صغیرہ ایک کرہ کی ہوں جس کا نصف قطریں ہوا اور

ایسین ایک دوسرے کو قطع کرے اور ہر س کرے ہو اور اوب و س اوس مثلث کرومی کے

زاویہ ہوں جو اون کی مرکزوں میں خط وصل کرنی ہی پیدا ہوتا ہے تو

رقبہ ق کر = (ا جم لی + ب جم لی + س جم لی - ک) لی

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ رجب } (1 - \frac{1}{2} \text{ ر})}{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ رجب } (1 - \frac{1}{2} \text{ ر})} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ رجب } (1 - \frac{1}{2} \text{ ر})$$

(۱۲) ایک مثلث کروی کی دو ضلعی معلوم ہیں تو دریافت کرو کہ قبا و س کا کب زیادہ سی زیادہ ہوگا
(۱۳) ایک کروی سطح پر دو اسر عظیمہ کی قوسوں سے ایک کثیر الاضلاع جسکی ضلعوں کی تعداد معلوم ہے متعین
اوسکا رقبہ دریافت کرو اور پراسی ہیہ متنبا ط کرو کہ اگر ط نصف قطر قوسی دائرہ صغیر کا ہو تو اسکی
رقبہ کو کل رقبہ کروی وہ نسبت ہوگی جو ط کو ۲ سے

(۱۴) اگر ایک مثلث کروی کی نقا ط زاویہ ا و ب و س ہو اور انکی مقابل کی اضلاع کی نقا ط وسط
ا و ب و س ہوں اور ز کروی زیادتی مثلث کی ہو تو ثابت کرو کہ

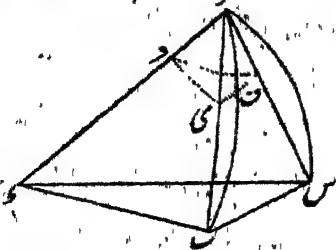
$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ز} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا و ب}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ س}} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ب و س}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا}} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا و س}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ب}}$$

(۱۵) اگر ا و ب و س دو اسر عظیمہ کے قوسوں میں سے ہوں ضلاع مثلث کی نقا ط وسط طائی جائیں ایک رقبہ
ہو تو ثابت کرو کہ باقی دو ضلعی ہی رجا ت ہونگے

باب نہم تقریبی اور تخمینہ صورتوں میں

(۱۰۴) جب نصف قطر کرہ کا بہت بڑا ضلاع مثلث کروی سے ہونا ہی تو اسوقت مثلثوں کے
حساب کتاب میں بعض خاص صورتقریبہ تخمینہ بہت کام میں آتی ہیں اسلیں ہم بعض کی تحقیقات اونپر
اس باب میں کریں گے

(۱۰۵) ایک مثلث کروی کی دو ضلعی اور انکی درمیان زاویہ معلوم ہے تو ان اضلاع کے
وسروں کی درمیان کا زاویہ دریافت کرو



فرض کرو کہ Δ اور Δ' اضلاع معلوم مثلث Δ بس کی ہیں اور مرکز کردہ کاپی مرکز کردہ Δ' ایک کردہ بناؤ اور فرض کرو کہ وہ Δ اور Δ' اس سے نقاط Δ اور Δ' پر ملیں تو زاویہ دی Δ میلان Δ' اور Δ اس کا ہوگا اور Δ' اس کے برابر ہوگا زاویہ Δ کے۔ مثلث Δ دی Δ' میں

$$\text{جم دی} = \text{جم دی} + \text{جم دی جب دی}$$

$$\text{اور دی} = \frac{1}{2} (\text{ک} - \text{طس}) \text{ اور دی} = \frac{1}{2} (\text{ک} - \text{طب})$$

اسی طرح Δ' میں $\Delta = \text{جم} + \text{طب} + \text{طس} + \text{جم} + \text{طب} + \text{طس}$ اگر اضلاع مثلث کی بہ نسبت نصف قطر کردہ کی نہایت چھوٹی ہوں تو Δ اور Δ' میں بہت تفاوت نہ ہوگا فرض کرو کہ $\Delta = \Delta'$ بر تقریباً تو

$$\text{جم دی} = \text{جم} + \text{بر جب}$$

$$\text{اور جب} + \text{طب جب} + \text{طس} = \text{جب} + \text{طب} + \text{طس} - \text{جب} + \text{طب} + \text{طس}$$

$$\text{جم} + \text{طب جب} + \text{طس} = \text{جم} + \text{طب} + \text{طس} - \text{جب} + \text{طب} + \text{طس}$$

$$\text{اسی طرح} \Delta' = \text{جب} + \text{طب} + \text{طس} + \text{جب} + \text{طب} + \text{طس} + \text{جب} + \text{طب} + \text{طس} + \text{جب} + \text{طب} + \text{طس}$$

$$\text{بر جب} = \Delta' - (\Delta' - \text{جب} + \text{طب} + \text{طس}) - (\Delta' - \text{جب} + \text{طب} + \text{طس})$$

$$\text{اسی طرح} \Delta' = \text{مس} + \text{جب} + \text{طب} + \text{طس} - \text{مس} + \text{جب} + \text{طب} + \text{طس}$$

اسی مقیاس قوسی بر کا دریافت ہوتا ہے۔ تعداد ثانیوں کی زاویہ میں Δ سطح دریافت ہوتی ہے کہ اس کی مقیاس قوسی کو ایک ثانیہ کی مقیاس قوسی پر تقسیم کر دیا ایک ثانیہ کی مقیاس قوسی پر تقسیم کر دیا علم مثلث مستوی دفعہ ۱۲۳ دیکھو

اگر طول قوسوں کی موافق طاء اور طب کے Δ اور Δ' نصف قطر کردہ کا ہو تو Δ اور Δ' مقیاس قوسی طاء اور طب کے ہونگے اور وتر مثلث کی اضلاع کا طول Δ اور Δ' Δ اور Δ' ہوگا بس Δ سطح جب مثلث کی دو ضلعی اور نصف قطر کردہ کا معلوم ہو تو مثلث وتری کی اضلاع اور زاویوں کا حساب کر سکتی ہیں

جب ب = صیب جب ا = صیب جب ا تخمیناً

اور س = ک - ا - ب = ک - ا - ب تخمیناً $\frac{1}{4}$ حصہ جب س اسی معلوم ہوگا
اور مثلث مستقیم الاضلاع حل ہو جائیگا اسلئے کہ اوئیں سی و ضلعی اور اوئیں سی ایک ضلع
کا مقابل زاویہ معلوم ہے

(۴) فرض کرو کہ مثلث کروی کی دوزاویں اور اوئیں درمیان کا ضلع معلوم ہی مثل او ب طس

تو ج = $\frac{۲}{۳}$ جب ا جب ب = $\frac{۲}{۳}$ جب ا جب ب تقریباً $\frac{۲}{۳}$ جب (ا + ب)

پس اسی مثلث مستقیم الاضلاع کے دوزاویں اور اوئیں درمیان کا ضلع معلوم ہو گیا
(۵) فرض کرو کہ مثلث کروی میں دوزاویں اور ایک ضلع ان زاویوں میں سے ایک زاویہ کے
مقابل کا معلوم ہی مثلاً او ب و ط

س = ک - ا - ب = ک - ا - ب تقریباً اور

ج = $\frac{۲}{۳}$ جب ب جب س $\frac{۲}{۳}$ جب (ب + س)

اور اسکا حساب ہو سکتا ہی کیونکہ ب و س تقریباً معلوم ہو گئے

(۱۰۸) عظمت اور سود مندی ضابطہ بیڈر کی اوسوقت ظاہر ہوتی ہی کہ اوسکو ط کر دیا

کی پیمائش میں استعمال کرنی ہیں اور اس تخمینہ اور تقریبی حساب کا امتحان صحت بخوبی کر سکتے ہیں
اب ہم چند مثالیں حل کر کے اس باب میں لکھتی ہیں تاکہ طالب علموں کو اوس میں مشق ہو جائے
ہم پہلی ثابت کر رہے ہیں کہ از دیا د کروی مثلث کی تقریباً جیسی ہی اب ہم اپنی تحقیقات کی بدولت
اس طرح کرتی ہیں کہ از دیا د کروی مثلث کی قیمت نہایت تقریبی دریافت ہو جائے

(۱۰۹) از دیا د کروی کی تخمینہ قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ از دیا د کروی کو تعبیر کرتا ہے

جب $\frac{۱}{۲}$ از = جب $\frac{۱}{۲}$ ط جب $\frac{۱}{۲}$ ط جب س

جم $\frac{۱}{۲}$ طس تقریباً

$$\begin{aligned} \text{جب } \frac{1}{4} \text{ ز} &= \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{اسی واسطے ز} = \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اور جب } \frac{1}{4} \text{ س} &= \text{جب } \left(\frac{1}{4} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ ز} \right) = \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} + \frac{1}{4} \text{ ز} \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} + \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} = \text{جب } \frac{1}{4} \text{ س} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Chercher

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

پس اسی معلوم ہوا کہ رقبہ مثلث کروی کا رقبہ مثلث مستقیمہ الاضلاع سی بقدر $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ کے زیادہ ہوتا ہے

(۱۱۰) تقریبی قیمت جب کی دریافت کرو

$$\begin{aligned} \text{جب } \frac{1}{4} &= \text{جب } \frac{1}{4} \\ \text{اسی معلوم ہوا کہ تخمینہ جب } &= \text{جب } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \text{جب } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

(۱۱۱) مم ب - مم ۱ کو تقریباً بیان کرو

$$\text{مم ب - مم ۱} = \text{جب } \frac{1}{4} \left(\text{مم ب} - \text{جب } \frac{1}{4} \right)$$

پس بموجب دفعہ ۱۱۰ کے تقریباً

$$\text{مم ب - مم ۱} = \text{جب } \frac{1}{4} \left(\text{مم ب} - \text{جب } \frac{1}{4} \right)$$

دفعہ ۷۴ میں ثابت کرائی گئی کہ تقریباً

(۵) ابس ایک مثلث کرومی ہی جسکی ضلعی ربعات دائرہ ہیں اور ق ایک نقطہ مثلث کی اندر ہے تو ثابت کرو کہ حجم ق ارجم ق ب حجم ق س + مم ب ق س مم س ق ا مم ا ق ب =

اور مس اب ق مس ب س ق مس س ا ق = ۱

(۶) اگر نقطہ وسط مثلث مساوی الاضلاع ابس کا ہو اور ق کوئی نقطہ سطح مستدیر کرہ پر ہو
 لہذا مس ق مس س (۱) = (۱) حجم ق ب + حجم ق س = ۲

حجم ق ا + حجم ق ب + حجم ق س = حجم ق ب + حجم ق س + حجم ق س حجم ق س حجم ق ا
 (۷) اگر مثلث ابس کا ہر یک ضلع ربعہ ہو اور نقطہ دائرہ اندرونی مثلث کا ہو اور ق

نقطہ سطح مستدیر کرہ پر ہو تو حجم (ق ا + حجم ق ب + حجم ق س) = ۳ حجم ق س

(۸) سطح مستدیر کرہ پر تین نقطوں میں سے ہر ایک سے دو سین ایک دائرہ عظیم کردہ کے تین نقطوں تک پہنچی گئی ہیں اور انکی حیثیات مابین ط ا و ط ب و ط س و ط ا و ط ب و ط س اور ط ا و ط ب و ط س ہیں
 تو ثابت کرو کہ ط ا ط ب ط س + ط ا ط ب ط س + ط ا ط ب ط س = ط ا ط ب ط س + ط ا ط ب ط س + ط ا ط ب ط س
 + ط ا ط ب ط س

(۹) دفعات ۱۱۰ اور ۱۱۱ سے ثابت کرو کہ تخمیناً

لوک صد = لوک سہ + لوگ جب ب - لوک جب ا + س لوگ (مم ا - مم ب)

(۱۰) دفعہ ۱۰۶ میں تقریبی حساب اون رقموں تک کریں جنہیں ق س شامل ہی تو ثابت کرو کہ تقریباً

$$\text{حجم ا} = \text{حجم ا} - \frac{\text{صد لرب جب ا}}{100} + \frac{\text{صد لرب (صد سہ - صد سہ لرب ا)}}{100} \text{ جت ا}$$

(۱۱) نتیجہ گذشتہ سے ثابت کرو کہ اگر ا = ۱ + بر تو تخمیناً

$$\text{بر} = \frac{\text{لرب جب ا}}{100} (۱ + \frac{\text{صد سہ} + \frac{\text{صد سہ} + \frac{\text{صد سہ} + \frac{\text{صد سہ}}{100}}{100}}{100})$$

باب دہم مساحت ارض اور قطعات ارض

(۱۱۳) بڑا فائدہ دونو علم مثلث مستوی اور کروی کا بہتہ کہ کل زمین کی حدود اور شکل یا اوکے قطعات سطح مستدیر کرہ کی خوب تحقیقات اور انکی استقامت سے کریں - اس مطلب کو اختصار کے

کے ساتھ بیان کرتی ہیں ایسی مثالوں کا بیان پڑھنا ضروری ہے کہ کالج کی کتابوں میں اس مطلب کو دیکھو اور ان میں بڑی توضیح کے ساتھ وہ لکھا ہوا ہے (۱۱۵) کوئی پیمائش ہو اور میں بڑی بات یہ ہے کہ خط افقی کی پیمائش کیجائی اور اس خط افقی کو قاعدہ کہتی ہیں ایک ہوا زمین کی میل لینی اس کام کی لمبی منتخب کیجائی ہی اور اس خط کی پیمائش نہایت صحت سے ہوتی ہے گز لکڑی کی اور دیات کی اور سیسوں کی خالی بنیادیں اور جربیں لوہی کی مختلف طرح کی پیمائش میں کالم اتنی ہیں اور موسم کی گرمی اور سردی کا جو کچھ اثر اون پر ہوتا ہو اس کا بھی نہایت لحاظ رہنا ہی اور جو کچھ تفاوت اس اثر سے ہوتا ہے وہ بھی نہایت احتیاط سے محسوب ہونا ہی موسموں کی تاثیر سے گزروں اور جربوں کا طول بڑھ جاتا ہے اس انفرائش طول کو حساب میں مجرا لیتی ہیں

(۱۱۶) جب کسی ملک کی پیمائش کرنی منظور ہوتی ہے تو او میں مناسب موقعی تلاش کر کے مقرر کرتی ہیں اور وہاں نشانیاں قائم کرتی ہیں اور پھر ان نشانوں میں خطوط وصل کر کے ملک کو مثلثوں میں تقسیم کر لیتی ہیں پھر ان مثلثوں کی زاویوں کا مشاہدہ کر کے پیمائش کرتی ہیں یعنی اون زاویوں کو ناپتی ہیں جو دو نشانوں کی محاذی زاویہ سے نشان پر واقع ہو فرض کرو کہ او اور ب اطراف قاعدہ کی ہیں اور س ایک تیسرے نقطہ پر نشان او اور ب سے دکھائی دینا ہی تو مثلث اب س میں زاویہ اب س اور ب اس کا مشاہدہ کرینگے تو اسی اس اور ب س کا حساب لگ جائیگا اب پھر فرض کرو کہ د ایک اور نشان جو جوبی نقطہ پر ہے کہ وہ س اور اسی دکھائی دینا ہی تو زاویہ اسی اس اور س اور د کا مشاہدہ کرینگے اور چونکہ اس معلوم ہی اس میں س اور د کا حساب لگائیگے

(۱۱۷) علاوہ اصلی قاعدہ کے اور بہت سی خطوط ملک میں جسکی پیمائش ہوتی ہے یا جانی پڑے اور پھر ان پیمائش کی ہوئی طولوں کا مقابلہ اون طولوں سے کیا جاتا ہے جو مثلثوں کا ایک سلسلہ بنا کر اعتبار اصلی قاعدہ کی حساب سے نکالتی ہیں جسقدر ان طولوں میں تفاوت

کم ہوگا اور مٹی ہی صحت حساب پیمائش میں ہوگی
(۱۱۸) پیمائش میں تمام مثلثوں کی ضلع کی طولوں کی دریافت کرنی کی مختلف حکمتیں اور ترکیبیں ہیں
ایک ترکیب یہ ہے کہ مثلث کروڑی کی صورت کو ٹھیک ٹھیک کام میں لائیں۔ کردہ ارض کا نصف قطر
تخمیناً و تقریباً نہایت صحت کی ساتھ معلوم ہی اس نقطہ کو قیاسی تعبیر کرویں اگر سہ طول کسی
قوس کا ہو تو معیاس قوسی او سکی سامتی کی زاویہ مرکزی کا سہ ہوگا اور علم مثلث کروڑی کے
صورتاً و نسبتاً جملہ علم مثلثی سہ کے بیان کرنی کی لمبی چال سہ ہیں پس اسی سہ دریافت ہوگا اور
بعد ازاں سہ دریافت ہو جائیگا۔ چونکہ محل پیمائش میں سہ ایک نہایت چھوٹی مقدار ہوتی ہے
اس سبب ہی بہ ضرورت ہوگا کہ ہم نوچہ اور نوچٹی زاویوں کی علم مثلثی جملوں کی لوکار غم کی طرف
کریں جسے حساب میں بری درجہ کی صحت حاصل ہو

مثلثات کروڑی کی ٹھیک ٹھیک حساب کی بجائی بہت سی مختلف ترکیبیں تقریبی حساب کی ہیں لیکن
صرف یہ دو زمین سی کام میں آتی ہیں اول یہ ہے کہ مثلث کروڑی کی زاویوں کی مثلث دسری کے
زاویوں کو تخمیناً بموجب دفعہ ۱۰۵ کی دریافت کریں اور پھر مثلث دسری کا محل مثلث مستقیم الاضلاع
سی کریں دوسری ترکیب یہ ہے کہ بموجب ضابطہ لجنڈر کی تقریبی اور تخمینہ فیض بموجب دفعہ ۱۰۴ کی انکالیز
(۱۱۹) تین ترکیبیں جو ادبیر بیان ہوئیں وہ ملک فرانس کی پیمائش کرنی میں دلبر کام میں لایا اور
جب گریٹ برطانیہ کی پیمائش ہوئی تھی تو اس وقت ملک کے علم مثلثی صحت میں مثلثوں کی پیمائش
ترکیب دسری ہی کی تھی مگر اب وہ مدت سی سرد کی ہے اور اسکی جگہ اکثر لجنڈر کا ضابطہ کام میں آتا ہے
لفٹنٹ کرنل الورٹ ہندوستان کی علم مثلثی صحت میں یہی ضابطہ لجنڈر ہی کو کام میں لایا ہوتا
(۱۲۰) اگر مثلث مستقیم الاضلاع کی تینوں زاویہ شاہدہ کنی جائیں تو انکی صحت کی لمبی بہت شہادت
کافی ہے کہ مجموعہ انکا برابر دو قائمون کی ہو اب ہم یہ بیان کریں گے کہ مثلث کروڑی جو سطح مستویہ
زمین پر بنائی جائیں ان میں زاویوں کی شہادت کی صحت از دیادہ کروئی بہت جانت سی کس طرح
اور کہاں تک ہو سکتی ہے

(۱۲۱) سطح زمین پر مثلث کروئی بنا باجای اور اس کا رقبہ فرسٹ مربعوں میں معلوم ہو تو کوئی قاعدہ

ایسا قائم کرو کہ از دیادہ کروئی ہی حساب ثنائیوں میں ہوا کرے

فرض کرو کہ تعدا ثنائیوں کی از دیادہ کروئی میں ہی اور مثلث کی رقبہ میں ج تعدا فرسٹ مربعوں کے

اور بقی تعدا فرسٹوں کی نصف قطر زمین میں ہی پس اگر مقیاس قوسی از دیادہ کروئی کا ہو تو

$$ج = ز لقی ۲ اور$$

$$ز = \frac{ن کہ}{40 \times 40 \times 180} = \frac{ن}{۲۰۴۲۴۵} \text{ تخمیناً}$$

$$\text{اسیوا سطح} = \frac{ن لقی ۲}{۲۰۴۲۴۵}$$

اب بڑی تحقیقات سی ہی بات دریافت ہوئی ہے کہ طول ایک درجہ کا سطح مستدیر کہہ پر ۳۶۵۱۵۵۵ فرسٹ

$$\text{پس کبھی} = ۳۶۵۱۵۵$$

اس مساوات سی جو قیمت لقی کی دریافت ہو تو لو کارٹم کی حساب سی ہیہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\text{لوکن} = \text{لوک ج} - ۹۱۳۲۶۷$$

پس اسی معلوم ہوا کہ اگر ح معلوم ہو تو ن دریافت ہو جائیگا

اس قاعدہ کو جنرل روئی کا قاعدہ کہتی ہیں جبکہ وہ ہوتی فی گریٹ برٹن اور ائرلینڈ کی مثلثی پیمائش

کی تھی تو وہ اس قاعدہ کو کام میں لائی تھی مگر ڈیوس کہتا ہے کہ یہ قاعدہ مسترد لیبی فی ایجاد کیا ہوا

(۱۲۲) جنرل روئی کا قاعدہ جب کام میں آسکتا ہے کہ رقبہ مثلث کروئی کا معلوم ہوا اور مثلث کروئی

کا رقبہ جب ٹھیک ٹھیک دریافت ہو گا کہ اجزاء مثلث کی صحیح معلوم ہوں لیکن ایسی موقعوں پر

تقریبی اور تخمینہ رقبہ معلوم ہونا کافی سمجھا جاتا ہے مثلاً فرض کرو کہ ہم رقبہ مثلث مستقیمہ الاضلاع

کا موافق ضابطہ پیمائش کے مثلث کروئی کی رقبہ کی جگہ کام میں لائیں تو دفعہ ۱۰۵ کی موافق

خطی تخمینہ میں لکھ کر $\frac{۱۰۵}{۱۰۰} = \frac{۱۰۵}{۱۰۰} + \frac{۱۰۵}{۱۰۰} + \frac{۱۰۵}{۱۰۰}$ رقبہ سابق کی موافق ہوگی اور یہ ۱۰۰۰ ہوتی ہوگی

اگر طولی اضلاع کا ۱۰۰ میل سی زائد ہو یا یہہ فرض کرو کہ ہم رقبہ کے حساب کرتی ہیں

تخمینہ خطیوں کا جو ارضوں میں واقع ہوتی ہیں دریافت کرتی ہیں تو فرض کرو کہ ایک خطی کا

مقیاس قوسی ہو پس بجای کی کہ $\frac{س}{س+ع}$ سے حصہ جس کی جگہ ہم $\frac{س}{س+ع}$ کام میں آئے۔
 تو غلطی کی رقبہ سی نسبت تختہ $\frac{س}{س+ع}$ مں ہوگی ابتدا ہات حال میں $\frac{س}{س+ع}$ چند ثانیہ کی زاویہ کے
 مقیاس قوسی سی بڑی نہ ہوگی پس اگر س بہت چھوٹا نہ ہو تو $\frac{س}{س+ع}$ مں عملاً قابل خیال کے نہیں ہے
 (۱۲۳) مثال ذیل مژدہ ہوس جس کی (انگریزی پالیس) سی منتخب کر کی گئی اور اردن نے
 اس کو اختیار کیا ہے کہ ایک مثلث کی زاویہ مشاہدہ کی ہوئی $۴۲^{\circ} ۲۰' ۲۰''$ اور $۴۰^{\circ} ۵۵' ۴۹''$
 اور $۵۰^{\circ} ۱۸' ۴۸''$ ہوں تو مجموعہ غلطیوں کا جو مشاہدات میں واقع ہوئی دریافت کرنا مطلوب ہے
 فرض کرو کہ زاویہ ۱ کی مقابل کا ضلع ۲۰۰۰ فٹ ہے تو رقبہ کا حساب اس جہت طالعہ جس
 سی ہوگا اور جزل روی کی قاعدہ کی موافق $۲۳ = ۲۳$ اب مجموعہ مشاہدہ کی ہوئی زاویوں کا
 $= ۱۸۰ - ۱۸۰ + ۲۳$ ہونا چاہیے تھا اسی معلوم ہوا کہ مشاہدات میں غلطی بقدر
 بقدر ۲۳ آگئی ہے

اب یہ مشاہدہ کرنی والی کی راہ پر رہا کہ اس غلطی مشاہدات کو مشاہدہ کی ہوئی زاویوں
 پر تقسیم کر دی ایک ترکیب یہ ہے کہ تہائی ۲۳ کی ہر یک زاویہ پر زیادہ کر دی اور اس طرح
 جزو اسی حاصل ہوں اور ان کو اصلی زاویہ مانیں

(۱۲۴) ایک تحقیقات مثلث کی صورت کی باب میں کی گئی ہے کہ جسی زاویوں کی مشاہدہ کرنے
 میں جو غلطیاں واقع ہوئی ہیں ان کا اثر ضلع مثلث کی طولوں پر بہت ہی کم ہو اگر دلیل
 ٹھیک نہیں ہے مگر یہی وہ طالب علموں کی توجہ کی قابل ہے۔ فرض کرو کہ مثلث کی تینوں
 زاویہ مشاہدہ کی گئی ہیں اور ایک ضلع طالعہ معلوم ہے اب مطلوب یہ ہے کہ مثلث کی کیا صورت
 ہو جو اعلاط مشاہدات کا اثر اور ضلع طالعہ پر بہت ہی کم ہو۔ فرض کرو کہ از زیادہ کر دی
 نہایت صحت کی ساتھ جو عمل کی گئی کافی ہے معلوم ہے اگر مشاہدہ کی ہوئی زاویوں کا مجموعہ
 دو فائضوں سے بقدر زیادہ کر دی گئی ہے تو ان زاویوں کو بدل دیا اور ایک مقدار
 زیادہ کر کے ان کا مجموعہ صحیح ہو جائیگی۔ فرض کرو کہ اووب و س زاویہ میں جو سطح

مشاہدہ سی دریافت ہوئی ہیں اور جو ضرورت کی حالت میں بدلی ہی کی ہیں
 اور فرض کرو کہ $د$ و $ع$ ب $د$ و $ع$ س غلطیاں $د$ و $ع$ س کی ہیں تو $ع$ $د$ ب $د$ و $ع$ س =
 اسیو $ا$ کہ بموجب فرض کی $د$ و $ع$ س کا مجموعہ صحیح ہی اب شکت کو مثلث مستقیمہ $الاع$ تقریباً
 فرض کریں تو صحیح قیمت ضلع طس کی یہ ہوگی طاجب $(س + ع)$ یعنی طاجب $(س + ع)$
 اب تقریباً

جب $(س + ع)$ = جب $س + ع$ س جب $س$ (علم مثلث مستقیم $الاع$ باب ۱۲)
 جب $(ا - ع - ب - ع)$ = جب $ا - (ع + ب + ع)$ جم $ا$

اسی تقریباً ہم کو یہ معلوم ہوا کہ

طس = طاجب $ا$ { $ا + ع$ س مم $س$ } { $ا - (ع + ب + ع)$ مم $ا$ }
 = طاجب $س$ { $ا + ع$ ب مم $ا$ + $ع$ س مم $س$ } { $ا - (ع + ب + ع)$ مم $ا$ }

اور مم $س + مم$ $ا$ = جب $(ا + س)$ = جب $ا$ جب $س$ تخمیناً

پس اسی معلوم ہوا کہ غلطی میں تخمیناً

طاجب $ا$ $ع$ س + طاجب $س$ جم $ا$ $ع$ ب ہے

اور علی ہذا القیاس غلطی طب کی تقریباً

طاجب $س$ $ع$ ب + طاجب $ب$ جم $ا$ $ع$ س ہے

اب یہ ناممکن ہے کہ ٹھیک ٹھیک علامتیں اور مقدار اعلاط $ع$ ب اور $ع$ س کی مقرر کر سکیں
 پہلی دلیل ٹھیک نہ ہوئی۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر غلطی کو چھوٹا کرنا ہو تو جب $ا$ کو چھوٹا کرنا نہ چاہئے

اور چونکہ مجموعہ $د$ و $ع$ ب $د$ و $ع$ س کا برابر صفر کی ہی تو انہیں ہی دو کی ایک علامت

ہونی چاہی اور $س$ کی اوی خلاف ہیو $ا$ طی ہم کو ہی سی $د$ و $ع$ ب اور $ع$ س کی مختلف

علامتوں کی ہونی کا یہ نسبت یکساں علامت ہونی کی زیادہ خیال کر سکتی ہیں

اگر $ع$ ب اور $ع$ س کی مختلف علامتیں ہیں اور جم $ا$ مثبت ہی تو ط $ا$ و ط $س$ میں جم $ا$ و

غلطیان واقع ہونگے بہ نسبت اول غلطیوں کی جو حجم کی منفی ہوتی ہیں واقع ہوتی ہیں
اس واسطی اور چاہی کہ قائمہ سی چھوٹا ہو۔ اور اگر غلبہ اس بات کا ہو کہ ع ۱ اور ع ۲ میں بہت
اختلاف نہیں ہیں تو ب اور س تقریباً مساوی ہونگی اور یہ شرط اوس صورت میں پوری ہوگی
کہ مثلث مثلث مساوی الاضلاع سی بہت اختلاف نہ رکھی

اگر صرف دو زاویے ۱ اور ب مشابہہ کئی جائیں تو ہم کو وہی جہلی طب اور طس کی اعلاط کی کئی اصل
ہونگی جو سابق میں حاصل ہوئی تھی لیکن کوئی وجہ زیادہ قوی رخ باوع س کی علامتیں مختلف ہوتی
کی بہ نسبت یکساں علامت ہوتی کی نہیں ہیں اس صورت میں فرض کرنا کہ ۱ ایک قائمہ ہی غالباً
اعلاط کو نہایت چھوٹا بنا دینگا

(۱۲۵) بڑا عقدہ مشکل اوس صورت میں انگہ پڑا ہی کہ جسوقت ع ب اور ع س تقریباً مساوی
خیال کئی جائیں اس وقت کہ ع ۱ ع ۲ ع ۳ = پس اگر ع ب اور ع س کو تقریباً مساوی
اور مختلف علامت خیال کرتی ہیں تو حقیقت میں ع ۱ = تقریباً فرض کرتی ہیں پس تینوں
زاویوں کی مشابہہ کرتی ہیں ہم خیال کرتی ہیں کہ جو ایک دفعہ مشابہہ کرتی ہیں غلطی واقع ہوتی ہی
وہی غلطی تعداد کی دوسری دفعہ مشابہہ کرتی ہیں واقع ہوئی ہی اور باقی مشابہہ میں کوئی غلطی
نہیں واقع ہوتی

(۱۲۶) اب تک ہم فی زمین کو ایک کرہ کامل کی شکل فرض کیا ہی لیکن حقیقت میں اس کی شکل ایسی
کرہ کی ہی جو سہروں پر سی چٹا اور برج میں سی پہولا ہوا ہوز میں کی اس شکل کی ہوتی کی سبب سے
یہی غلطیان واقع ہوتی ہیں اور سکا بیان اور کتابوں میں ہے
(۱۲۷) زمین اور قطعات زمین کی پیمائش میں ہم کو بعض اوقات ضرورت ہوتی کہ زاویہ فیضی
درمیان دو نقطوں کی مشابہہ کریں ان نقطوں کے درمیان افقی سی فاصلہ قوسی ہوتا ہے
زاویہ جو محاذی ان نقطوں کی واقع ہو معلوم ہے
اور زاویہ ارتفاع یا زاویہ پستی ہی جانتی ہیں

اجزاء و مثلث کروئی کے چھوٹی چھوٹی تبدیلیاں اور مثلث کروئی اور مثلث مستقیمہ الاضلاع

کے درمیان جو تعلقات ہیں

(۱۲۸) بعض اوقات اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ہوتی ہے کہ اجزاء و معلومہ میں غلطی خفیف سی کسی جز منطوب کے حساب لگانی میں کس قدر غلطی ہو جاتی ہے۔ یہاں ہم ایک مثال لکھتے ہیں

(۱۲۹) مثلث کروئی کا ایک ضلع اور اس کی مقابل کا زاویہ مقدار میں متقل ہیں باقی اجزاء میں سی دوئی اندر جو خفیف تبدل ہو تو ان خفیف تبدیلیوں کے ربط کو دریافت کرو

فرض کرو کہ س اور طس مستقل ہیں

(۱) اور ضلعوں کی خفیف تبدیلیوں کی درمیان تعلق دریافت کرو

ہم فرض کرتے ہیں کہ ط اور طب اس مثلث کی اجزاء جو س اور طس کے متقل مقرر کرنی ہیں تبصر کرتے ہیں اور ط + ع ط اور طب + ع ط ایک اور ایسی ہی مثلث کی اضلاع کو تبصر کرتے ہیں تو ہم کو یہ دریافت کرنا ہے کہ اس حالت میں کہ ع ط اور ع طب نہایت خفیف ہوں تو اوپر کی کیا نسبت اور تعلق ہوگا

جم طس = جم ط + جم طب + جب ط + جب طب جم س

اور جم طس = جم (ط + ع ط) + جم (طب + ع طب) + جب (ط + ع ط) + جب (طب + ع طب)

اور نیز جم (ط + ع ط) = جم ط - جب ط + ع ط تقریباً

جب (ط + ع ط) = جب ط + جم ط + ع ط تقریباً

اور علیٰ ہذا القیاس جم (طب + ع طب) اور جب (طب + ع طب) کے صورتیں ہیں

(علم مثلث مستقیمہ الاضلاع کا بارہواں باب دیکھو) پس

جم طس = (جم ط - جب ط + ع ط) + (جم طب - جب طب + ع طب)

+ (جب ط + جم ط + ع ط) + (جب طب + جم طب + ع طب) جم س

پس تفریق کرنی ہیں اگر ہم حاصل ضرب طاء کو کچھ نہ خیال کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$ع = ط (جب طاجم ط - جم طاجب طجم س)$$

$$ع ط (جب طجم ط - جم طاجب طجم س)$$

اسی نسبت طاء طاء طاء کی ارقام طاء طاء وس میں معلوم ہونگی ہم اس نسبت کو

سہل صورت میں ارقام اور ب میں بیان کر سکتی ہیں

اسی واسطی کہ جب طاجب طاء تقسیم کرنی ہی ہم کو بموجب دفعہ ۴۴ کے یہ حاصل ہوتا ہے

$$ع ط م ب جب س + ع ط م ب جب س =$$

$$اسی واسطی ع طاجم ب + ع طجم ا =$$

(۲) اور زاویوں کے خفیف تبدیلیوں کی نسبت دریافت کرو

جو نتیجہ ہم ابھی اوپر نکال آئی ہیں اس میں بوسیدہ قطبی مثلث کی ہم یہ مستطاب کر سکتی ہیں کہ

$$ع اجم ط + ع طجم ا =$$

اور یہ دوسری طرح سی بھی حاصل ہو سکتا ہے جس میں کہ تعلق پہلے نتیجہ کا نہ ہو

(۳) ایک ضلع اور اس کے مقابل کی زاویہ (ا ط ا) کی درمیان خفیف تبدیلیوں کا تعلق دریافت کرو

یہاں جب ا جب طس = جب س جب ط اور

$$جب (ا + ع) جب طس = جب س جب (ط + ع ط)$$

پس تفریق کرنے سے جم ا جب طس ع ا = جب س جم طاء ط

$$اور اسی واسطی ع ا مم ا = ع طام ط$$

(۴) ایک زاویہ اور اس کے متصل کی ضلع (ط ا ب) کے خفیف تبدیلیوں کا تعلق دریافت کرو

ہم کو معلوم ہے کہ مم س جب ب = مم طس جب ط - جم ب جم ط

اگر عمل پہلی طرح سی کریں تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$مم س جم ب ع ب = مم طس جم طاء ط + جم ب جب طاء ط + جم طاجب ب ع ب$$

اسیو $\frac{1}{2}$ (مجموع جسم ب - جسم طاب ب) ع ب = (مجموع جسم طاب + جسم جب طاب) ع طاب

اسیو $\frac{1}{2}$ - جسم ب ع ب = جسم طاب ع طاب

اسیو $\frac{1}{2}$ ع ب جسم ب = ع طاب مجموع طاب جسم ب

(۱۳۰) اس باب کی اخیر میں ایسی مثالیں بہت سی ہیں چونکہ ان میں کچھ وقت نہ تھی اسلئے وہ طالع کے مشق کی لمبی جھوڑ دی گئی ہیں

(۱۳۱) علم مثلث کرومی میں کسی صورت میں جسمین اجزاء مثلث شامل ہوں اور ان اجزاء میں ایک ضلع ہی ہو تو اسی ایک ایسی ہی صورت علم مثلث مستقیمہ الاضلاع میں دریافت کرو

فرض کرو کہ ہم وسط اضلاع مثلث کی طولوں کو تغیر کرتا ہی اور لوق نصف قطر کرہ کا ہے پس کچھ دھچ دھچ مقیاس قوسی اضلاع مثلث کی ہوئی اب جملوں کچھ دھچ دھچ کو جو کسی صورت میں واقع ہوتی ہیں کچھ دھچ دھچ کی قواعد میں پہلا کر لکھو پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ لوق لا نہایت زیادہ ہو گیا تو صورت مذکور کی صورت محروکہ تعلقات علم مثلث مستقیمہ الاضلاع ہو جائینگے مثلاً دفعہ ۱۰۴ میں صور

جسم ب = $\frac{\text{جسم طاب} - \text{جسم طاب جسم طاب}}{\text{جسم طاب جسم طاب}}$

ہم یہ بہت سناط کرتے ہیں کہ

جسم ب = $\frac{\text{کنا} + \text{کنا} + \text{کنا} - \text{کنا} - \text{کنا} - \text{کنا}}{\text{کنا} + \text{کنا} + \text{کنا} - \text{کنا} - \text{کنا} - \text{کنا}}$

اب اگر لوق لا انتہا بڑا فرض کیا جائی تو آخر کا بہرہ حاصل ہوگا کہ

جسم ب = $\frac{\text{کنا} + \text{کنا} - \text{کنا}}{\text{کنا}}$

اور یہ جملہ جسم ب کی واسطی مثلث مستقیمہ الاضلاع کی ارقام میں ہے

اور یہ دفعہ ۱۱۰ صورت سے

جسم ب = $\frac{\text{جسم طاب} - \text{جسم طاب جسم طاب}}{\text{جسم طاب جسم طاب}}$

اب فرض کرو کہ لو لانتہا بڑا ہو تو آخر کا رسم کو یہ حاصل ہوگا

$$\text{جبب} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

یعنی مثلث مستقیمہ الافلاح اضلاع میں یہ نسبت ہوتی ہے جو انکی مقابل کی تراویوں کی جیب میں

مثلاً

(۱) اگر مثلث کروی میں س اور طس مقدار مستقل رہیں اور ط اور ط ب پر کوئی تخفیف زیادتی

ع ط اور ع ط ب کی کجائی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(1 - \text{جیب ط})}{(1 - \text{جیب ط ب})} = \frac{\text{جیب ن}}{\text{جیب طس}}$$

(۲) اگر س اور طس مقدار مستقل رہیں اور ایک ذرا سی تبدیلی ط میں کجائی تو بتاؤ اس تبدیلی

کے سبب اور اجزاء مثلث میں کیا تبدیلی ہوگی اور انکی رقبہ میں بھی تبدیلی دریافت کرو

(۳) فرض کرو کہ س اور طس مقدار مستقل ہیں تو مساوات ذیل کو ثابت کرو کہ وہ دو اجزاء کے

تبدیلیوں کی تعلقات کو تعبیر کرتے ہیں

$$\text{جبب س ع ط ب} = \text{جبب ط ع ب} \quad \text{ع ب جبب س} = \text{ع س جبب ط}$$

$$\text{ع طامس س} = \text{ع ب جبب ط} \quad \text{ع طامس س} = \text{ع س جبب ط}$$

$$\text{ع ط ب جم س} = \text{ع ط} \quad \text{ع ب جم ط} = \text{ع س}$$

(۴) فرض کرو کہ ط اور طس مقدار مستقل ہیں تو ذیل کی مساواتوں کو ثابت کرو کہ وہ دو

اجزاء کے خفیف تبدیلیوں کو تعبیر کرتے ہیں

$$\text{ع ب مس س} = \text{ع س مس ب} \quad \text{ع طامم س} = \text{ع ب جبب ط}$$

$$\text{ع ط} = \text{ع ا جیب ط جبب} \quad \text{ع ا جبب ب جم س} = \text{ع ب جبب ا}$$

(۵) فرض کرو کہ ب اور س مقدار مستقل ہیں تو ذیل کی مساواتوں کو ثابت کرو کہ وہ دو

اجزاء کے خفیف تبدیلیوں کو تعبیر کرتے ہیں

$$\text{ع ط ب مس طس} = \text{ع طس مس ط ب} \quad \text{ع ا مم طس} = \text{ع ط ب جبب ا}$$

ع ۱ = ع طاجب ط ب جس ع طاجب ب جسم طس = ع ط ب جب ۱

(۶) اس صورت جب ط = ۱/۲ = $\frac{\text{جسم ج جسم (ج-۱)}}{\text{ج ب ب جس}}$ سے رقبہ مثلث مستقیم الاضلاع

کے صورت مستطکرو یعنی طاجب ب جس جس ب نصف قطر کردہ کلاہایت بڑا ہو

(۷) اگر ۱ اور س متقادیر متقل رہیں اور ط ب پر خفیف سی زیادتی ہو تو ثابت کرو کہ

طاکم ہوگا اگر طس ربعی بڑا ہو اور زیادہ ہوگا اگر طس ربع سے کم ہو

(۸) دو مثلث اب س اور اب س سب ط س برابر ہیں مگر در مقام میں اختلاف کہتے ہیں تاہم

جسم اب ب جسم ب س جسم س ۱ + جسم ۱ س جسم ب ب جسم ب ۱ = -

(۹) مثلث مستقیم الاضلاع کی کونسی صورتیں کی مماثلت سی اور کونسی صورضابطہ کا س سے

ثابت ہوتی ہیں

(۱۰) صورت جسم طس جسم ۱ + ب = جسم س ط + ط ب سی مثلث مستقیم الاضلاع

کا رقبہ ارقام اضلاع اور ایک زاویہ میں دریافت کرو

(۱۱) باہمیہم کی ساتویں مثال سی کیا نتیجہ نکلی گا اگر نصف قطر زمین کو لا انتہا فرض کریں

باب دوازدہم

مجسم کثیر السطح

(۱۲) مجسم کثیر السطح یا کثیر القواعد جسم ہی کہ شکل مستقیم الاضلاع سی گہرا ہو اور ان

مستقیم الاضلاع کو اوکی جہات کہتی ہیں۔ مجسم کثیر القواعد کی جہات متشابہ اور کثیر الاضلاع منظم

ہوتی ہیں اور زاوی مجسداہکی برابر ہوتی ہیں تو اسکو مجسم منظم السطح کہتے ہیں

(۱۳) اگر مجسم کثیر القواعد تعداد ذوا یا مجسداہکی ہو اور ان تعداد جہات کی اوری

اوسکی کتابوں کی تعداد تو ص + ف = ی + ۲ کے ہوگا

کوئی نقطہ مجسم کثیر السطح میں ایسا فرض کرو کہ وہ مرکز اوسکا ہو اور ایک کرہ رسم کرو جسکا نصف

نقط ہو اور مرکز سی خطوط تمام سطوح کی کوٹوں میں ملاؤ اور جس نقطہ پر یہ خطوط مسطح

کرہ کو قطع کریں اور نقاط میں قوسیں دوا کر عظیم کی وصل کرو تو اس سطح سطح سندیر کردہ اتو منی
 کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاوے گی جتنی کہ مجسم کثیر السطح کے جہات ہیں
 فرض کرو کہ ان کثیر الاضلاعوں میں کسی کثیر الاضلاع کی زاویوں کا مجموعہ تو برابر ج کے ہے
 اور تعداد اضلاع کی م ہی تو مجموعہ ۴۹ کی رقبہ کثیر الاضلاع کا یہ ہوگا کہ نق^۲ { ج - (۲-۲) } ک
 اور ان سب کثیر الاضلاعوں کی قیوں کا مجموعہ برابر ہی سطح سندیر کردہ کی یعنی ۴ کہ نق^۲
 چونکہ کثیر الاضلاعوں کا تعداد ت ہی تو اسی معلوم ہوا کہ
 ۴ ک = مس ج - ۴ مس م + ۲ ف ک

اب مس ج تمام کثیر الاضلاعوں کی زاویوں کی مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی اور مساوی سطحی برابر ہے
 ۲ ک x تعداد زوایا مجسمہ یعنی ۲ ک ص اور مس م برابر ہی تعداد اضلاع جملہ کثیر الاضلاعوں
 یعنی ۲ م کی چونکہ ہر کنارہ ہی ایک قوس پیدا ہوتی ہی اور وہ مشترک دو کثیر الاضلاعوں میں ہی آتا ہوگا
 ۴ ک = ۲ ک ص - ۲ م ک + ۲ ف ک

$$۱۰. \text{اسی واسطے } ص + ف = م + ۲$$

(۱۳۴) محسبات کثیر السطح منظم صرف باج ہو سکتی ہیں
 فرض کرو کہ م تعداد اضلاع مجسم کثیر السطح منظم کی ایک جہت میں ہو اور ن تعداد سطحی زاویوں کے برابر ہو
 مجسمہ میں ہو تو تمام زوایا سطحی کی تعداد م ص سی یا م سی سی یا م سی سی تعبیر ہوگی پس
 م ن = ن ص = ۲ م سی اور ص + ف = م + ۲
 ان مساواتوں سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص = \frac{۲ (م + ن) - م ن}{۲} \text{ اور } م = \frac{۲ (م + ن) - م ن}{۲} \text{ اور } ف = \frac{۲ (م + ن) - م ن}{۲}$$

یہ سب جملہ جاتی کے صحیح اور درست ہوں اس واسطے جاتی ۲ (م + ن) بڑا بہ نسبت م ن کے ہو
 اسی واسطے $\frac{۱}{۲}$ بڑی بہ نسبت $\frac{۱}{۲}$ کے ہو
 لیکن ن کم ۲ سی نہیں ہو سکتا اسلی $\frac{۱}{۲}$ بڑا ۲ سی نہیں ہو سکتا اور اسی جاتی کہ $\frac{۱}{۲}$ بڑا ۲ سی ہو

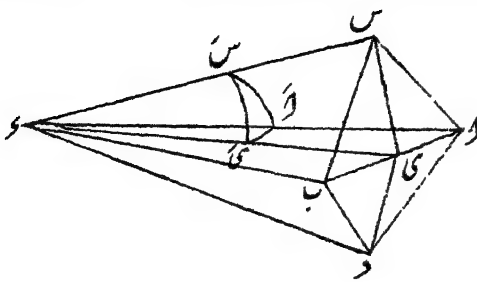
اور چونکہ ہم صحیح عدد ہی اور ۳ سی کم نہیں ہو سکتا
پس جو قیمتیں داخل ہوئی قابل ہیں وہ ۳ و ۴ و ۵ ہیں — امتحان کرنی سی معلوم ہوگا کہ قیمتیں
اور ان کی جنسی تمام ضروری شرائط مساواتوں کی پوری ہوتی ہیں تفصیل ذیل میں اور مجموعہ
مفہم کثیر السطح کا نام اس کی جہات کی اعتبار سے رکھا گیا ہے

م	ن	ص	ی	ق	نام مجموعہ کثیر السطح
۳	۳	۴	۴	۴	ذو اربعۃ السطح مائخروط
۴	۳	۸	۱۲	۴	مکعب
۳	۴	۴	۱۲	۸	ذو ثنائی
۵	۳	۲۰	۳۰	۱۲	ذو اثنا عشرہ السطح
۳	۵	۱۲	۳۰	۲۰	مجموعہ دوا عشرین السطح

یہ بات ہی دیکھنی چاہی کہ ثبوت میں ایک بات زیادہ دعویٰ سی ثابت ہو گئی ہی کیونکہ دعویٰ
میں یہ بات نہیں باقی گئی ہی کہ جہات مساوی الاضلاع اور متساوی الزوا یا ہیں اور یہاں
حقیقت میں یہ ثابت ہوا ہی کہ پانچ مجموعہ ایسی ہو سکتی ہیں کہ ان کی جہات کی تعداد اضلاع اور تمام
اس کی مجسمہ زاویوں میں تعداد زوا یا مسطحہ کی ایک ہی ہو

(۱۳۵) مجموعہ کثیر السطح کی تمام مجسمہ زاویوں کی مسطحہ زاویوں کا مجموعہ برابر ہوتا ہے (ص-۲) کہ
اسو اسطی کہ اگر مجموعہ کثیر القواعد کی کسی قاعدہ کی اضلاع کی تعداد کم تعبیر کری تو اس جہت کے
داخلی زاویوں کا مجموعہ (م-۲) کہ بموجب ۳۲۳ ام اقلیدس کی ہوگا اسی معلوم ہوا
کہ مجموعہ تمام جہات کی داخلی زاویوں کا

مت (م-۲) کہ یعنی مت م-۲ کہ ہی یعنی ۲ (ی-ق) کہ یعنی ۲ (ص-۲) کہ ہی
(۱۳۶) مجموعہ کثیر السطح کی دو متضاد جہتوں کا میلان دریافت کرو



فرض کرو کہ اب متصل مشترک دو متصل کی جہتوں کا ہی اور س اور د اونکی مرکز ہیں۔ اب
کی نقطہ ی پر تنصیف کرو اور ملاؤ س ی اور د ی تو س ی اور د ی عمود اب پر ہونگی اور
زاویہ س ی د زاویہ میلان دو متصل کی جہتوں کا ہوگا اور کوہم ی سی تعبیر کرتی ہیں۔
س ی اور د ی کی سطح میں س د اور د عمود س ی اور د ی پر لگا لو جو د پر سطح اور مرکز
و کے کرد ایک کرہ بناؤ جو د اب د دس کو ا ب دس دس پر ملے پس ا س ی مثلث
کروی ہوگا۔ چونکہ اب عمود س ی اور د ی پر ہی تو وہ عمود سطح س ی د پر ہوگا پس
سطح ا ب ج میں اب ہی عمود سطح س ی د پر ہی اسی معلوم ہوا کہ زاویہ س ی د مثلث
کروی کا ایک قائمہ ہی۔ فرض کرو کہ م تعداد اضلاع چھ ہیں مجسم کثیر القواعد کی ہے

اور ن تعداد سطح زوایں ہر مجسمہ زاویہ میں ہے تو
زاویہ $ا س ی = د س ی = ب ک ی = گ ی$ اور ن برابر زاویوں میں

سی جو گرد کی بنیں اوغین سی ایک زاویہ کا نصف زاویہ س د ی ہے

یعنی $ا س ی = ب ک ی = گ ی$ مثلث قائم الزاویہ س د ی میں

جم س د ی = جم س د ی جب ا س ی

یعنی جم ک ی = جم (ک ی - ب ی) جب ک ی

اسیوے جب ی = جم ک ی

(۱۳۶) مجسم کثیر القواعد میں جو ا کرہ اندر اور اوپر زاویے بنایا جائی لو کی نصف قطر دریا کرو

فرض کرو کہ کنارہ $AB =$ طا اور $DS =$ لق اور $DA =$ لق اور لق نصف قطر کرہ اندرون کا
اور لق نصف قطر کرہ بیرون کا ہے تو

$سی = ای مم اس ی =$ ط مم کم

لق $= سی مس سی = سی سی سی =$ ط مم کم مس می

اور نیز لق $=$ لق جم اس $=$ لق مم می $=$ لق مم می اس $=$ لق مم کم مم کم

اسیوٹے لق $=$ لق مس کم مس کم $=$ ط مم کم مس می

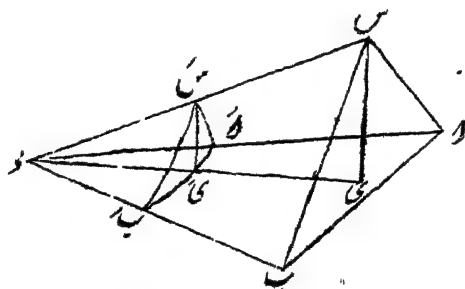
(۱۳۸) سطح اور جسم کثیر القواعد منظم کی دریافت کرو

کثیر القواعد کی ایک جہت کا رقبہ برابر ہو ط مم کم اور اسیوٹے سطح کثیر القواعد کی من ط مم کم ہے

اور نیز جسمت مخروط کی جسکی ایک جہت قاعدہ محکم کثیر السطح کا ہی اور اس پر لقی محکم کم کم ہے

اور اسیوٹے جسمت محکم کثیر السطح کا من ط مم کم کم ہے

(۲۳۹) ایک محکم متوازی السطح کی جسمت او کی کناروں اور او کی میلان کے زاویوں میں یافت کرو



فرض کرو کہ کنارہ $DA =$ طا اور $DB =$ طب اور $DS =$ طس اور میلان کے راوی

$ب د س =$ کہ اور $ب د ا =$ ہا اور $ا د ب =$ ط س ی عمود سطح $ا د ب$ پر اور سی نقطہ

پر ملتا ہوا انکالو کی مرکز پر کرہ کھینچو جو $ا د ب$ د د س دوی سی نقاط $ا د ب$ و $ب د س$ دوی متساوی

جسم متوازی السطح پر برابر ہی چلے اور او کی قاعدہ اور ارتفاع کی $=$ طا طب جب طس ی

$=$ طا طب طس جب ط جب س دوی اور مثلث کرو سی $ا د ی$ کا زاویہ می قائمہ ہی پس

جب س دوی $=$ جب س دوی $=$ جب س دوی $=$ جب س دوی $=$ جب س دوی

اور مثلث کرو سی $ا د ی$ میں

مجسم دواربعۃ اسطوح سی ہوتا ہی۔ پس اگر کناری اور میلان معلوم ہیں تو دفعہ ۱۳۴ میں جو جملہ جسامت کی لئی بیان کیا گیا ہی اوسکا چٹا حصہ دریافت کرو۔ جسامت دواربعۃ اسطوح کی اوسکی چھون کناروں کی رفوں میں یہی بیان ہو سکتی ہی اوساطی کہ دفعہ ۱۳۴ کی شکل میں

ب س = ط ا و س ۱ = طب و ا ب = طس تو

$$\begin{aligned} \text{جسم سہ} &= \frac{\text{ط}^2 + \text{طس}^2 - \text{ط}^2}{\text{طس}} = \text{جسم سہ} \\ \text{جسم کر} &= \frac{\text{ط}^2 + \text{طس}^2 - \text{ط}^2}{\text{طس}} = \text{جسم کر} \end{aligned}$$

پس اگر یہ قیمتیں جسم اور جسم و جسم کر کی اوس جملہ میں جو دفعہ ۱۳۴ میں لکھا ہی درج کریں تو جسامت دواربعۃ اسطوح کی اوسکی کناروں کی رفوں میں دریافت ہو جائیگے نتائج مفصلہ ذیل جسمیں جسامت دواربعۃ اسطوح کو تعبیر کرنا ہے حاصل ہونگے

جس ۱ - ط ا طب ۲ طس ۲

$$\begin{aligned} &+ \text{ط}^2 \text{ط}^2 (\text{ط}^2 + \text{طس}^2 - \text{ط}^2) + \text{ط}^2 \text{ط}^2 (\text{طس}^2 + \text{ط}^2 - \text{ط}^2) + \\ &\text{طس}^2 \text{طس}^2 (\text{ط}^2 + \text{ط}^2 - \text{طس}^2) - \text{ط}^2 (\text{ط}^2 - \text{طس}^2) (\text{ط}^2 - \text{طس}^2) \\ &- \text{ط}^2 (\text{ط}^2 - \text{طس}^2) (\text{ط}^2 - \text{طس}^2) - \text{طس}^2 (\text{طس}^2 - \text{ط}^2) (\text{طس}^2 - \text{ط}^2) \end{aligned}$$

(۱۷۲) اگر ارحس دواربعۃ اسطوح کا سطح قاعدہ میں واقع ہو تو جسامت معدوم ہو جائیگی پس اگر مساوات بالائی جانب چپ کو برابر صفر کی لکھ دیں تو اوسی تعلق اور چھ خطوں کا حاصل ہوگا جو کسی سطح میں جہاں چار نقطے لیکر وصل کریں

سوارسکی ایک ترکیب کارٹ صاحب کی ہی اوسی جسامت مجسم دواربعۃ اسطوح کی لگاؤ نکلتی ہیں اب ہم اوسکو بتلائینگے اور جو اور زیادہ تحقیقات کارٹ صاحب کی لکھی ہی اوسکو

یہی لکھینگے

ارقام لکھنی کی ترکیب کو بدلنا اسطرح آسان ہی کہ جس حرفوں پر زیر لگی ہوئی ہیں اوتکو بی زیر

حرفوں سی بدل دیں

(۱۸۳) کسی سطح میں جہاں چار نقطی لین اور انہیں چھ خطوط وصل کریں تو ان میں چھ مجسم

ارتباط ہواوسی دریافت کرو

فرض کرو کہ $ا$ اور $ب$ وس $د$ چار نقطی ہوں اور $ا ب = طس$ اور $ب س = طا$ اور

$س د = طب$ اور نیز $د ا = طا$ اور $د ب = طب$ اور $د س = طس$

اگر مثلث $ا ب س$ کی اندر واقع ہونہائی تو مجموعہ زاویوں $ا د ب$ اور $ب د س$ اور $س د ا$ کا

برابر چار فاقوں کی ہی بس جم $ا د ب = جم$ (ب د س + س د ا)

تقلیب و تخیل ہی ہم کو یہ حاصل ہو گا کہ

$۱ = جم ا د ب + جم ب د س + جم س د ا - جم ا د ب جم ب د س جم س د ا$

اگر دبا پر مثلث $ا ب س$ سی واقع ہونہائی تو س زاوی نقطہ پر برابر باقی دوزاویوں کے مجموعہ کی ہوگی

اور نتیجہ ایسی لکھا ہی وہی فایم رہی گا

$ا ب جم ا د ب = طا + طب + طس$

اور حسب التماہین ہی اس سطح تعبیر ہو سکتی ہیں ان قیمتوں کو اوپر کی مساوات میں درج کریت ہوگا

ارتباط مطلوب حاصل ہو جائیگا اور اس کا اختصار ہو کر یہ صورت حاصل ہوگی

$۔ = طا + طب + طس$

$+ طا طا (طب + طس - طا) + طب طب (طس + طا - طب) + طس طس (طا + طب - طس)$

$- طا (طا - طب) (طا - طس) - طب (طب - طس) (طب - طا) - طس (طس - طا) (طس - طب)$

(۱۸۴) مجسم ذواربعتہ اسطح کی چھ اوکھچہ کناروں کے قیوت میں دریافت کرو

فرض کرو کہ مثلث $ا ب س$ ایک جہت یا قاعدہ مجسم ذواربعتہ اسطح کا ہی اور اس کی ضلع کی طول $طا$ اور $طب$ ہیں

اور $طا$ و $طب$ و $طس$ طول اوس خطوط کے ہیں جو $ا ب$ اور $ا و$ و $س ب$ میں ملائی جائیں

اور $س$ طول اوس عمود کا ہی جو $ا ب$ سے قاعدہ پر لگا لیا تو طول اوس خطوں کا مجموعہ عمود اور

$ا و$ و $ب و$ و $س ب$ میں ملائی جائیں یہ ہو گا کہ $طا - ع + طب - ع + طس - ع$

پس جو ارتباط دفعہ ۱۴۳ میں قائم ہوا ہی وہی قائم رہی گا اگر کجابی طاکے
 $\text{ع}^۱ - \text{ع}^۲$ اور طب کی $\text{ط}^۱ - \text{ط}^۲$ اور طس کی $\text{طس}^۱ - \text{طس}^۲$ مندرجہ کریں تو یہ حاصل ہوگا
 $\text{ع}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲) + \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{طس}^۱ + \text{طس}^۱ \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{طس}^۱} = \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{طس}^۱}$
 $+ \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{ط}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) + \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{طس}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) + \text{ط}^۱ \text{ط}^۲ \text{طس}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲)$
 $- \text{ط}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲) (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) - \text{ط}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) - \text{طس}^۱ (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲) (\text{ط}^۱ \text{ط}^۲ - \text{ط}^۱ \text{ط}^۲)$
 سرع کا سو گنا مثلث اب س کی مجذور کا ہی پس جانب بہت ۱۴۴ حصہ ہی جسمین جس حجم

ذو اربعہ اسطوح کو تعبیر کرتا ہی۔ پس جملہ مطلوب حاصل ہو گیا

(۱۴۵) اگر ایک کرہ کی سطح مستدیر چہاں چابین چار نقطی فرض کر کی اون کی درمیان چہہ قوسین دوائیہ
 عظیم کے وصل کریں تو بتاؤ افکی درمیان کیا ارتباط ہوگا

فرض کرو کہ ادوب وس و د چار نقطی بین اور اب = ط اور ب س = کہ اور س د = ہ

اور د د = کہ اور د ب = ہ اور د س = ط

موافق دفعہ ۱۴۳ کے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

د = حجم ادوب + حجم اب دس + حجم اس د ا - حجم ادب - حجم ب دس - حجم س د ا

اب حجم ادوب = حجم ط - حجم کہ کہ حجم د

جب کہ جب د

اور جب ا لتامین ہی اسطوح تعبیر ہو سکتی ہیں پس اگر ہم ان قیمتوں کو اوپر بھیجیں کہ ہیں تو ہم کو ارتباط

مطلوبہ بعد اختصار یہ حاصل ہوگا کہ

۱ = حجم کہ + حجم ہ + حجم ط + حجم کہ + حجم د + حجم ط

- حجم کہ کہ کہ - حجم د حجم د - حجم ط ط - حجم ط ط

- (حجم کہ حجم د حجم ط + حجم کہ حجم د حجم ط)

+ حجم د حجم کہ حجم ط + حجم ط حجم کہ حجم د

+ (حجم کہ حجم د حجم ط + حجم ط حجم د حجم ط)

- (۳) مجسم ذواربعة القواعد منظم کی ایک جیب اور باقی جہات خارج شدہ کو ایک کرہ مس کرتا ہی اوسکا نصف قطر دریافت کرو
- (۴) مجسم ذواربعة القواعد منظم کی اندر اور باہر کری بنائی گئی ہیں اور اوکے نصف قطر اور پتے تو ثابت کرو کہ $b = 12$
- (۵) مجسم منظم ذواربعة القواعد میں ایک کرہ بنایا گیا ہے جس کا نصف قطر ہی اور بق نصف قطر اوس کرہ کا ہی جو کناروں کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ $a = 13$
- (۶) مجسم منظم ذواربعة القواعد میں ایک کرہ بنایا جا اور اس کا نصف قطر ہو اور بق نصف قطر اوس کرہ کا ہو جو اوس مجسم کی ایک جیب کی اور باقی جہات خارج شدہ کو مس کری تو ثابت کرو کہ $a = 12$
- (۷) اگر ایک مکعب اور ذی ثنائی عشرہ القواعد کو معلوم اندھائی جائیں تو ان دونوں مجسموں پر جو کرہ بنایا جائیگا وہ ایک ہی ہوگا اور عکس ثابت کرو
- (۸) اگر ذی اثنتی عشرہ القواعد اور دو العشرین القواعد ایک کرہ معلوم پر بنائی جائیں تو جو کرہ اون دونوں پر بنائی جائیگی ایک ہی ہوگی اور عکس اس کا ثابت کرو
- (۹) ایک مجسم منظم ذواربعة القواعد اور دوسرا مجسم منظم ذی ثنائی القواعد ایک ہی کرہ کی اندر بنائے جاسکتے تو ان دونوں مجسموں میں جو کری بنائی جائیگی اوکے نسبت بتلاؤ
- (۱۰) مجسم متوازی اسطوح کی چاروں قطروں کی مربعی ملکہ چونکہ کناروں کی مربعوں کے مجموعے ہوتے ہیں
- (۱۱) اگر مجسم متوازی اسطوح کی کونوں کی نقطوں کو مرکز مقرر کر کے برابر کریں تو جو حصے جسم کے ان کروں میں آئیں گے اون کا مجموعہ برابر کسی ایک کرہ کی جسامت کے ہوگا
- (۱۲) ایک مکعب میں مجسم ذی ثنائی القواعد کھینچا گیا ہے اسطرح کہ ذی ثنائی القواعد کی کونوں کے نقطے مرکز جہات مکعب کی ہیں تو ثابت کرو کہ مکعب کی جسامت چھ گنی مجسم ذی ثنائی القواعد کی جسامت ہوگی
- (۱۳) یہ ممکن نہیں ہے کہ کسی حنیر کو ایک جسم کے محسبات منظم کثیر اسطوح بالکل پر کر دیں ۱۱ مکعب
- اگر ہمہ یہ جس ہوگا کہ ذواربعة القواعد اور ذی ثنائی القواعد کے جہات مساوی ہیں استعانت لیا جائے

اور ایک بہ نسبت دوسرے کے دو چند کیے جائیں

(۱۳) ایک کرہ کا قطر قطبی اور اسکی سطح مستدیر فیثکٹ کر وی بنایا گیا ہے اور اسکی کونون کی نقطون میں اور ان نقطون اور مرکز میں خطوط طائی گئی ہیں تو جو مخروط سطح پیدا ہوگا تو ثابت کرو کہ جس اوکی یہ ہوگی

قط (مس لئ مس لئ مس لئ مس لئ س)

یہاں لئ اور لئ اور لئ ہا اور لئ ہ نصف قطر دائرہ اندرونی اور دواثر خارجی کے ہیں
(۱۵) ایک کرہ کا نصف قطر لئ سی اور اس میں مجسم منظم ذوار بقہ القواعد بنا یا گیا ہے اور اسکی کونون کی نقطی قطب بنائی گئی اور چار دواثر صغیرہ کنج گئی ہیں سطح سی کہ ہر ایک دائرہ تین دائروں کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ قبضہ سطح مستدیر کا جو سطح ہر دائرہ سی احاطہ کی جائیگی برابر ہوگی ہک لئ (۱۱) (۱۱) (۱۱)
(۱۶) مثلث کر وی اب س میں و کوئی ساق قطر ہی تو حاصل ضرب کوئی دو ضلعون کی صیغون اور اونکے زاویہ درمیانی کی جیب کا =

جب ا و جب ب و جب س و { نم ا و جب ب و س + مم ب و جب س و ا + مم س و جب ا و ب }

باب سیزدہم مسائل متفرقہ

(۱۷) ایک کرہ کی دائرہ صغیرہ کی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ و قطب دائرہ خور و کا اور ص نقطہ معین کرہ بر ہی اور ص لا ایک دائرہ عظیم معین ہے
فرض کرو کہ و ص = کہ اور و ص لا = ہ و مقام نقطہ و کا بواسطت ان قوسی محد اور معین
لکہ اور تکی دریافت ہوتا ہے اور ق کوئی نقطہ محیط دائرہ صغیرہ کا ہے اور ق ص = ر اور
ق ص لا = د پس داور معین اور محد و نقطہ ق کی ہیں اور و ن = لئ تو مثلث و ص ق میں

جم لئ = جم کہ جم ر + جب کہ جب رجم (د-ر) . . . (۱)

محیط دائرہ میں کوئی ساق قطر ہو تو اسکی قوسی محد اور معین کی تعلق مساوات سی تعبیر ہوگی
اگر دائرہ دائرہ عظیم ہو تو لئ = ک ہوگا اور یہ مساوات ہوگی کہ

. . . جم کہ جم ر + جب کہ جب رجم (د-ر) = . . . (۲)

بہہ بات خیال کی قابل ہی کہ قوسی محدود و معین یہاں جو کلام میں لایا ہے وہ متماثل طول اور عرض ہلاکی میں جنسی کہ روی زمین پر بمقام کسی جگہ کا دریافت ہوتا ہے اور تمامی عرض کی اور تمامی طول کی ہیں

(۱۴۸) اون کروئی مثلثوں کے رہوں کا مقام السقاط دریا کر و جب کا فاعدا اور رقبہ معلوم ہے

فرض کرو کہ اب فاعدا معلوم = طس اور اس = را اور ب اس = د

جو کہ رقبہ معلوم ہے اس کی کروئی زیادتی معلوم ہے او سکوز سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۱۰۳ کے

$$\text{مم} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{مم} \frac{1}{2} \text{د مم} \frac{1}{2} \text{طس} \text{مم} \frac{1}{2} \text{ط} + \text{مم} \frac{1}{2} \text{ط}$$

اسی واسطے جب (ط - $\frac{1}{2}$ ز) = مم $\frac{1}{2}$ ر مم $\frac{1}{2}$ طس جب $\frac{1}{2}$ ز

اسی واسطے $\frac{1}{2}$ مم $\frac{1}{2}$ طس جب $\frac{1}{2}$ ز جم $\frac{1}{2}$ = جب ر جب (د - $\frac{1}{2}$ ز)

اسی واسطے جم ر جم $\frac{1}{2}$ طس جب $\frac{1}{2}$ ز + جب ر جم (د - $\frac{1}{2}$ ز + کچ) = مم $\frac{1}{2}$ طس جب $\frac{1}{2}$ ز

اگر اس مساوت اور دفعہ گذشتہ کی مساوت کا مقابلہ کریں تو معلوم ہو کہ مقام السقاط مطلوب اس واسطے

اگر کہ اورہ کو ہم محدود اور معین اس کی قطب کے خیال کریں تو

$$\text{مس کہ} = \text{مم} \frac{1}{2} \text{طس جب} \frac{1}{2} \text{ز} = \text{مس} \frac{1}{2} \text{طس}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ز} - \frac{1}{2} \text{کچ}$$

قرینہ سی بہہ گمان ہوتا ہے کہ قطب اس دائرہ کا اس دائرہ عظیمہ میں ہے جو اب کو قائمی زاویوں پر

تصفیف کرتا ہے اور یہ گمان اسانی میں ثابت ہو سکتا ہے اس واسطے کہ مساوات دائرہ عظیمہ کی

$$= \text{جم ر جم} \left(\frac{1}{2} \text{کچ} - \frac{1}{2} \text{طس} \right) + \text{جب ر جب} \left(\frac{1}{2} \text{کچ} - \frac{1}{2} \text{طس} \right) \text{جم (د - کہ)}$$

اور یہ نتیجہ کہ ر کہ اور د = ہ شرائط مساوات کو پوری کرتی ہیں

(۱۴۹) ایک مثلث کی اندر اور اوپر دائری بنائی گئی ہیں اون کی قطبوں کی درمیان کا بعد تو فی ساق

فرض کرو کہ ق قطب دائرہ اندرونی کا اور ع قطب دائرہ بیرونی مثلث اب س کا ہے

تو بموجب دفعہ ۸۵ کی ق اب = $\frac{1}{2}$ اور بموجب دفعہ ۹۲ ع اب = ص - س اسی معلوم ہوتا ہے کہ

کہ جم فی اوع = جم $\frac{1}{2}$ (ب - س) اور

جہم ق ق ع = جہم ق ا جہم ع ا + جب ق ا جب ع ا جہم ا (ب - س)
 شکل دفعہ ۸۹ کی دیکھو تو بموجب دفعہ ۹۲ کے

جہم ق ا = جہم ق ی جہم ا ی = جہم ق ی جہم ا ی (م - ن)

جب ق ا = جب ق ی = $\frac{\text{جب ق ی}}{\text{جب ا ی}}$

پس جہم ق ع = جہم ل ص جہم ق ی جہم ا ی (م - ن) + جب ل ص جب ق ی جہم ا ی (ب - س) ق م ا
 اسی واسطی بموجب دفعہ ۹۴ کے

جہم ق ع = جہم ل ص جہم ق ی جہم ا ی (م - ط) + جب ل ص جب ق ی جہم ا ی (ط ب + طس) ق م ا
 اب م ق = جب م اور مس ل ص = $\frac{۲ \text{ جب م ا ط جب م ا ط جب م ا ط}}{\text{ن}}$

اسی واسطی جہم ق ع = $\frac{۱}{۲} \left\{ \text{جب م جہم (م - ط) + ۲ جب م ا ط (ط ب + طس) جب م ا ط جب م ا ط} \right\}$
 = $\frac{۱}{۲} (\text{جب م ا ط + جب ط ب + جب طس})$

اسی معلوم ہوا $\left\{ \text{جہم ق ع} \right\} = ۱ - \frac{۱}{۲} (\text{جب م ا ط + جب ط ب + جب طس}) = ۱ - ۱ = ۰$
 = (م م ل ص + مس ل ص) بموجب دفعہ ۹۷

اسی واسطی جہم ق ع = جہم ل ص جب ق ی جہم ا ی (ل ص - ل ق)

اور جب ق ا ع = جب ل ص (ل ص - ل ق) = جہم ل ص ل ق

(۱۵۰) مثلث کی دائرہ اندرونی اور دائرہ خارجی کی قطبوں کا بقدر قوسی دریافت کرو

فرض کرو کہ ق قطب دائرہ بیرونی کا اور ق قطب دائرہ خارجی کا ہی جو زاویہ کی مقابل کہنچا جا سکے
 تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق ب ق ا = ک - ل (س - ا) اور

جہم ق ق ا = جہم ل ص جہم ق ی جہم ا ی (م - طس) - جب ل ص جب ق ی جہم ا ی (س - ا) ق م ا

= جہم ل ص جہم ق ی جہم ا ی (م - طس) - جب ل ص جب ق ی جہم ا ی (طس - ط) ق م ا ط ب

اسی واسطی جہم ق ق ا = جہم ق ی جہم ا ی (م - طس) - مس ل ص جب ق ی جہم ا ی (طس - ط) ق م ا ط ب
 دفعہ سابق کی طرح انحصار کرنے سے مساوات آخر کی جانب راست کارکن یہ ہوگا

۱۲۰ (جب ط ب + جب ط س - جب ط ا)

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{(ج ب ق ق)}{۱} - ۱ = (س ل ص - م م ل ق) ۲$ بموجب دفعہ ۴۴ کے

اسیو ا $\frac{ج ب ق ق}{۱} = ج ب ل ص ج ب ا ل ق + ج ب م ل ص + ل ق ا$

اور جب $\frac{ج ب ق ق}{۱} = ج ب ا ل ص + ل ق ا - ج ب م ل ص ج ب ا ل ق$

(۱۵۱) ایک قاعدہ معلوم ہے او سکی اضلاع کے نقاط وسطیں جو قوس گذرنی ہی وہ قاعدہ خارج
اوس نقطہ معین پر گذریگی جسکا فاصلہ قاعدہ کی نقطہ وسطی راجہ دائرہ ہے

فرض کرو کہ اب س مثلث ہی اور اس کا نقطہ وسطی ہی اور نقطہ وسط اب کا ہی اور
قوس جو نقاط ہی اور قوس گذرنی ہی خارج ہونی ہی قاعدہ خارج شدہ ہی نقطہ پر پڑتی ہی تو

جب ب ق = جب ب ق ق اور جب ا ق = جب ا ق ق

اسیو ا $\frac{ج ب ق ق}{۱} = ج ب ب ق ق$

اور سطح جب س ق = جب س ق ق

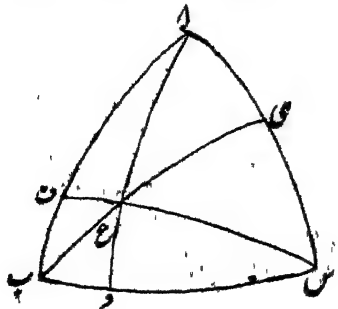
اسیو ا $\frac{ج ب ب ق}{۱} = ج ب س ق ق$

اسی معلوم ہوا کہ اگر نقطہ وسط ب س کا ہو تو

د ق = $\frac{۱}{۲} (ب ق + س ق) = \frac{۱}{۲} ک$

(۱۵۲) اگر مثلث کردی کی کونوں کی نقطوں ہی تین تینیں کسی نقطہ تک ایسی کھینچ جائیں کہ وہ متقابل کے

اضلاع ہی ملین تو حاصل ضرب اضلاع کی حصص علی التبادل کی جو ب کے پسمین برابر ہونگے



اشکال متفرقہ کرنی ہیں

فرض کرو کہ ق کوئی نقطہ ہی اور زاویوں ا و ب و س سی قوسیں کہتی گئی ہیں جو نقطہ ق پر گزرتی ہیں اور مقابل کی ضلع کو داوری اور ق پر قطع کرتی ہیں تو

$$\text{جب ب د} = \text{جب ب ق د} \text{ اور جب س د} = \text{جب س ق د} = \text{جب س د ق}$$

$$\text{اسی طرح جب س د} = \text{جب س ق د جب س ق}$$

اور سطح کی جملہ بیانیہ جب س ق اور جب س د کے سطح حاصل ہو سکتے ہیں اور اسی پر یہ ظاہر نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ب د} = \text{جب س ق د} = 1$$

جب ای جب ب د

$$\text{اسی طرح جب س ق د} = \text{جب س ق د} = \text{جب س د ق}$$

(۱۵۳) اگر بالعکس اسی نقاط داوری اور ق ضلع مثلث ہوں اور دفعہ بالا میں جو قلعی حصہ

کا بیان کیا گیا ہے مانا جائے تو قوسیں جو ان نقاط اور مقابل کی زاویوں پر گذرینگے

وہ ایک نقطہ مشترک پر ملانی ہونگی

پس اسی معلوم ہوا کہ اشکال مفصلہ ذیل ثابت ہیں۔ عمود جو مثلث کی کوٹون کی نقطوں

سی مقابل کی ضلع پر لگا کی جائیں ایک نقطہ پر ملینگے۔ اور خطوط جو مثلث کروی کی زاویوں

کی نصف کرتی ہیں ایک نقطہ پر ملینگے۔ اور خطوط جو نقاط وسط ضلع اور مقابل کی زاویوں میں

ملائی جاتی ہیں ایک نقطہ پر ملینگے۔ مثلث کی ضلع کو جن نقطوں پر دائرہ اندرونی مس کرتا ہے ان نقطوں

اور مقابل کے زاویوں میں خطوط ملائی گئی ایک نقطہ پر ملینگے

(۱۵۴) اگر ا و ب اور ا و س دو برابر قوسیں ہوں اور قوسیں ا و ب ب تنصیف قائمی زاویوں پر ہوں

فوسوں کے کجائیں جو نقطہ ق پر ملتی ہیں تو ا و ب اور

ا و ب کے مجازی نقطہ برابر زاویوں پر ملینگے



اسو اسطی ق Δ = ق Δ اور ق Δ = ق Δ ب Δ = ق Δ ب Δ ای معلوم ہوا کہ مثلث ق Δ ب کی ضلع موافق اپنی
اپنی نظیر کی برابر ضلع ق Δ ب کی ہیں اسو اسطی زاویہ ق Δ ب = ق Δ ب

بہرہ ہادی شکل اسوقت ہنیک کام اتی ہی کہ ایک تخت جسم جسکا ایک نقطہ قائم ہو حرکت کروی اسو اسطی کہ اگر
کہ قابل حرکت ہو اور اپنی مرکز کی گرد حرکت کرنا ہو اور یہ مرکز قائم ہو تو اس شکل سی ہم نظر ہونا
کہ کوئی سی دو نقطی قائم اور ب ایک اور مقام اور ب بر اوس حرکت کرہ سی اسکتی ہیں جو وہ
پہنچو کہ مرکز اور کسی نقطہ خاص پر گذرنا ہی کروی اسی ہم نتیجہ نکل سکتا ہی کہ تخت جسم من جسکا ایک
نقطہ قائم ہو تبدیل مقام ہو سکتا ہی اگر اوسکو گرد محوری جو نقطہ معین پر گذرنا ہی چکر دین

(۱۵۵) فرض کرو کہ ق Δ کوئی نقطہ زاویہ مسطح اور ب کی درمیان ہی اور نقط ق سی عمود خطوط اور ب
پہنچو تو ہم نظر ہر ہی کہ زاویہ جو ان عمودوں کے درمیان واقع ہوگا کم از زاویہ اور ب کا ہوگا۔ یہی کیفیت
زاویہ مجسمہ میں ہی وہ لکھنی کی لایق ہی فرض کرو کہ ایک زاویہ مجسمہ تین مسطح زاویوں سے
نقطہ پر بننا ہی اور زاویہ مجسمہ کے درمیان کسی نقط ق سی عمود ق ل اور ق م اور ق ن اون تین
سطحوں پر بنی کہ زاویہ مجسمہ بننا ہی نکالو تو مثلث کروی جو مطابق تین سطحوں ق ل ق م اور ق ن
اور ق ل کی بننا ہی ق بی مثلث اوس مثلث کروی کا ہی جو مطابق زاویہ مجسمہ کے بننا ہی۔
پروفیسر وی مورگن فی بہ بات نکالی ہے

(۱۵۶) مجسمہ کثیر اسطح دفعہ سہم کا نیچہ اول پور کو جو چاہتا اور جو ثبوت اوسکا لکھا وہ یہی ہے
ثبوت سی واضح ہونا ہی کہ نتیجہ بہت سی ایسی صورتوں میں نہیں کہ محبات کثیر اسطح کی زاویہ مجسمہ
خارجی ہی ہوں پھر ہی اسو اسطی کہ جو بات ثبوت کی ائی ضروری ہی وہ خط انتی ہی کہ مجسمہ کے اندر ایک نقطہ
ایسا لیا جاسکی کہ وہ مرکز کرہ کا ہو اور کثیر الاضلاع جو دفعہ سہم کی موافق بنائیں جائیں اور انکی کچھ
بہی بھی سپین منطبق نہ ہوں۔ اب ہم ایک اور ثبوت لکھینگے اور پھر اس نتیجہ سی اور بڑی بڑی نتیجہ
استنباط کرینگے۔ ہم ایک اول ایک ضابطہ لکھتی ہیں جو کاچی صاحب نے ایجاد کیا ہے
(۱۵۷) فرض کرو کہ کمال کی شکل متفرقہ کثیر الاضلاع ہوں اور یہ ضرور نہیں کہ وہ سب ایک ہی

سطح میں ہوں لیکن وہ سب ملکر کسی سطح کو چاروں طرف سے نہ گہری ہوں اور یہی تعداد کناروں

کی ہو اور ف تعداد شکلوں کی اور ص تعداد کونوں کی نقطوں کی تو ف + ص = ی + ۱

اگر سطح سے ایک ہی ہو تو بہرہ کل ظاہری کث = ۱ اور ص = ی

مگر استقرار یا ضمیمہ وہ کلیتہاً صحیح ثابت ہو سکتی ہی ہو کہ فرض کرو کہ بہرہ ضابطہ شکلوں کے جال کو اس
صحیح ہی اور اس جال پر ایک مستقیمہ الاضلاع ضلعوں کی زیادہ کی گئی ہی تو جال او شکل زیادہ کی گئی
کے م ضلاع منطبق ہیں اور اس واسطی م + ا کونوں کی نقطہ ہیں اور نشی جال کی نسبت بہرہ فرض کرو
کہ جال پہلے جال میں ہی اور ف اور ص سی تعبیر مونی تہذیر وہ اس میں ی اور ف اور ص سی تعبیر مونی تہذیر

$$ف + ص = ی + ۱ - م \text{ اور } ف = ۱ + م$$

$$ص = م + ۱ - ی$$

اسی واسطی ف + ص = ی = ف + ص - ی

لیکن ف + ص = ی + ۱ بموجب فرض کے اسی واسطی

$$ف + ص = ی + ۱$$

(۱۵۸) یوں کہ کے ضابطہ کی ثابت کرنی کی لئی ہم فرض کرتی ہیں کہ مجسم کثیر السطح کی ایک سطح ^{قط}
کرونی گئی تو اس سبب سے ایک جال اشکال مستقیمہ الاضلاع کا بنایا گیا جب یہ ضابطہ کاچی حصہ کا ص ^ن
اور ف - ۱ + ص = ی + ۱

$$اسی واسطی ف + ص = ی + ۲$$

(۱۵۹) مجسم کثیر السطح میں جہاں تک ضلع طاق ہوں تعداد میں روح ہوتی ہیں اور زاویہ مجسمہ

جو طاق سطح سی بنتی ہیں تعداد میں روح ہوتی ہیں

فرض کرو کہ اوب وس و وغیرہ تعدادوں جہاں کی ہر جو مثلث اور ذوالربع الاضلاع منقسم سے غیرہ ہیں

اور کہ اور ص اور ط اور وغیرہ تعدادوں زاویہ مجسمہ کی جوتیں چار یا چھ وغیرہ سطح سے بنتے ہیں

تو کنارہ دو جہتوں میں ملتی ہی اور سطح زیادہ ہوں بہرہ ہی ہوتا ہے اسی واسطی

۳+۲+۱ ب+س کم ۱۲ سی نہیں ہو سکتی اس نتیجہ سے بہت سی اور تیناچ مستط ہو سکتی ہیں
مثلاً ایک مجسم نہیں بن سکتا جنکی چہاں مثلث اور ذوالربعہ الاصلع یا مخمس نہیں ہیں
اور سطح ثابت کر سکتی ہیں کہ ۳+۲+۱ ط کم ۱۲ سے نہیں ہو سکتی
(۱۴۲) یا لوح سوٹ فی ثابت کیا ہی کہ علاوہ اون پانچ منظم مجسمات کثیر السطح کی جارا و مجسم ہیں
جنکی بناوٹ میں وہی قرینہ پایا جاتا ہی جو منظم مجسمات میں پایا جاتا اور سوٹ او کو مجسمات منظم گنا جائز ہی
ہم ایک کثیر الاصلع کا حال اس طرح لکھتی ہیں کہ اسی خیال اون تیناچ کا جو اس سوٹ فی ایجا کو پڑی ہوئی دہن میں پایا گیا
فرض کرو کہ ایک کثیر محیط پر پانچ نقطہ برابر فاصلہ پر متواتر مقرر کی گئی ہیں اگر ان نقاط میں خطوط ملاوین
تو ایک مخمس بن جائیگا۔ لیکن اگر ہم نقاط میں اس طرح سی خطوط وصل کریں کہ ۱ اور ۳ میں اور ۳
اور ۵ میں اور ۵ اور ۲ میں اور ۲ اور ۱ میں تو ہم ایک شکل ستارہ کی سی
باقرینہ بن جائیگی اور ہم اس کو مخمس منظم کہہ سکتی ہیں اسی ظاہر ہو تا کہ سطح چار اور صرف چار جدید
مجسمات بن سکتی ہیں اسی مجسمات سی جنکو چہاں اب میں تقاطع کرتی ہیں یوں کہ اضافہ متعلق نہیں ہے
(۱۴۳) اب دفعہ ۵ کی طرف پہر رجوع کرتی ہیں فرض کرو کہ ۱ تعداد کناروں کے حد محیط ہی اور ۱
تعداد کناروں کی او سکی اندر ہی اور فرض کرو کہ ۳ تعداد کونوں کی حد محیط میں ہی اور ۳
تعداد او سکی اندر ہے تو

$$۱ = ۱ + ۱$$

$$۳ = ۳ + ۳$$

$$۵ = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ + ۳ + ۳$$

$$۷ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۳ + ۳ + ۳ + ۳$$

$$۹ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳$$

اب ہم ضابطہ یوں کر توسیع کی ساتھ اس طرح ثابت کرتی ہیں جس طرح کاچی حد فی لکھا ہے
(۱۴۴) ایک مجسم کثیر السطح کی جتنی حصوں میں چاہو مجسمات کثیر السطح میں تقسیم کرو

اور فرض کرو کہ تعداد افکی ع ہو اور ص تعداد زوایا مجسمہ کی ہو اور ت تعداد جہات کی
اور ی تعداد کناروں کی تو ص + ت = می + ع + ۱

اب فرض کرو کہ مجسمات ایک ایک کر کے آپس میں ملائی جائیں اور فرض کرو کہ اول میں تعداد
کناروں اور جہات اور زوایا مجسمہ کی ہی اور ت اور ص اور دوم میں تعداد کناروں اور
جہات اور زوایا مجسمہ کی جواول اور دوم میں مشترک نہیں ہیں ہی اور ت اور ص بین
اور سوم میں تعداد کناروں اور جہات اور زوایا مجسمہ کی جواول اور دوم اور سوم
میں مشترک نہیں ہیں ہی اور ت اور ص بین اور طی ہذا القیاس تو ہم کو موافق دفعہ ۱۲ کی نتیجہ حاصل ہوگی

$$ص + ت = می + ۲$$

$$ص + ت = می + ۱$$

$$ص + ت = می + ۱$$

$$..... = - - -$$

اور جمع کرنے سے ص + ص + ص + ... = ص اور ت + ت + ت + ... = ت
اور ی + ی + ی + ... = ی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص + ت = می + ع + ۱$$

(۱۵) بہت سی کتابیں انگریزی میں ہیں جن کا مطالعہ کرنا ضوابط مجسمات کثیر السطح کی ایسی بکار آئے ہوگا

امتیازات

- (۱) جن کروئی مثلثات قائم الزاویہ کا وتر ایک ہی اوکی رہوں گا مقام ان نقاط کیا ہوگا اور
جو مسادات حاصل ہوا وہی ثابت کرو کہ مقام ان نقاط دائرہ ہوگا اگر نصف قطر کرہ کالاً انتہا ہو
- (۲) سطح مستوی کے برابر ایک نقطہ میں ان کے مرکزوں کا مقام ان نقاط قطع کا ایک کہ
زاویہ دوس = زاویہ دوس کی ہو دو اضلاع متقاطعہ القیاس ہوتی ہیں اور جب مثلث کے
مثلث متقیض الاضلاع پنجائی تو بتاؤ کہ کیا ہوگا

(۳) کرہ کی ایک قوس پر مثلثات کروئی مساوی الرقبہ بنائی گئی ہیں تو ثابت کرو کہ مقام النقط

اوس کوئی کی لفظ کا جو قوس معلوم کی مقابل ہی اس سوات سی اخیر ہوگا کہ

$$\text{مس}^1 \left\{ \frac{\text{مس}^1 (\text{کر} + \text{د})}{\text{مس}^1 (\text{کر} - \text{د})} \right\} + \text{مس}^1 \left\{ \frac{\text{مس}^1 (\text{کر} + \text{د})}{\text{مس}^1 (\text{کر} - \text{د})} \right\} = \text{مس}^1 \left\{ \frac{\text{مس}^1 (\text{کر} + \text{د})}{\text{مس}^1 (\text{کر} - \text{د})} \right\} + \text{مس}^1 \left\{ \frac{\text{مس}^1 (\text{کر} + \text{د})}{\text{مس}^1 (\text{کر} - \text{د})} \right\} = \text{مس}^1 \left\{ \frac{\text{مس}^1 (\text{کر} + \text{د})}{\text{مس}^1 (\text{کر} - \text{د})} \right\}$$

قوس معلوم کا طول ۲ کہ ہی اور رود قوس دائرہ عظیم کی ہی جو کسی نقطہ سی مقام النقط میں کہ
قوس معلوم پر جو کہ چھوڑا اور دائرہ عظیم کا چھوڑا قوس رکھو بایش کیا ہی اوس دائرہ عظیم کی
جو قوس معلوم کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہی اور ط ایک مقدار متقل ہے

$$(۴) \text{ کسی مثلث کروئی میں مس طس} = \text{جم ا مم طا} + \text{مم ب مم طب}$$

(۵) مثلث کروئی ابس کی زاویوں کی جو خطوط تنصیف کرنے والی جس نقطہ پر ملتے ہیں اوس نقطہ
اور ذوا یا ادب اور س کی درمیان بعد را اور دا اور ط ہی تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم جب (طب - طس)} + \text{جم جب (طس - طا)} + \text{جم جب (طا - طب)} = ۰$$

(۶) مثلث کروئی ابس کی ضلاع بس دس دا اب کی قطب ادب دس ہیں تو ثابت کرو کہ
دوائر عظیمہ دا اور ب ا اور س اب ایک نقطہ پر ایسی ملتے ہیں کہ

$$\text{جم ع ا جم بس} = \text{جم ع ب جم س} = \text{جم ع س جم اب}$$

(۷) ایک مثلث کی زاویوں سی قوسین دا دا اور ب سی اور س ف عمود مقابل کے

اضلاع پر اونی نقاط داوری اور ف پر ملتی ہوئی کچی گئی ہیں اور نقطہ پر تقاطع کرتی ہیں

$$\text{تو ثابت کرو کہ مس دا اور مس ب سی اور مس س ف برابر ہیں}$$

$$+ \text{جم ا جم بس} + \text{جم ب جم س} + \text{جم س جم اب} \text{ کے موافق ابی ابی نظیر کے}$$

(۸) اگر ع و ف در قوسین دوائر عظیمہ کی ہوں جو مثلث کی زاویوں ہی عمود مقابل کے ضلعوں

پر کھینچ جائیں اور نقطے ان حصوں (کر و کر) کو (د و د) اور (ط و ط) میں تقسیم ہوں

$$\text{مس کہ س کر} = \text{مس د مس د} = \text{مس ط مس ط}$$

اور $\frac{\text{جمع}}{\text{جمع}} = \frac{\text{جمع}}{\text{جمع}} = \frac{\text{جمع}}{\text{جمع}}$

(۹) اگر مثلث کروی کی ضلع کی نقاط وسط اور زاویہ قوسین کے بیچ جائیں اور کہ اور کہ دو حصی قوسیں ہوں جو ضلع طاقی تنصیف کرتی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب کہ} = ۲ \text{ جم ط}$$

(۱۰) مثلث کروی کی ضلع اب اور اس کی ایک قوس تنصیف کر کہ تیسرے خارج شدہ ضلع نقطہ پر پڑے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم اوق جب ط} = \text{جب ط} - \text{ط جب ط}$$

(۱۱) اگر کروی ذواربجہ الاضلاع اب س میں بمقابلہ کے ضلع اب اور س و خارج ہو کر نقطہ می پر ملین

اور ادا اور ب س نقطہ پر تو نسبت اون قوسوں کی جیسوں کی جو مجموعہ ذواربجہ الاضلاع کی قطرون پر پڑے جائیں وہی ہوگی جو اون قوسوں کی جیسوں میں نسبت ہوگی جو مجموعہ ذواربجہ الاضلاع کی قطرون پر پڑے

(۱۲) اگر کروی ذواربجہ الاضلاع اب س کی ضلع اب اور س خارج ہو کر نقطہ ع پر ملین اور ادا اور ب س

نقطہ ق پر اور ج کی قطر اس اور ب نقطہ ر پر تقاطع کریں تو

$$\text{جب اب جب س} = \text{جمع} = \text{جب اب جب س} = \text{جم ق} = \text{جب اب س جب ب د جم ر}$$

(۱۳) اگر مثلث کروی قاعدہ کی اطراف اور بمقابلہ کے ضلع کی نقاط وسط میں قوسیں ملائی گئیں تب یہ

تو مثلث متساوی الساقین ہوگا

(۱۴) اگر مثلث کروی کی اوپر دائرہ بنایا جاوے اور اس کی نصف قطر کا مماس برابر ہو دو چند مماسوں سے ملے ہو

نصف قطری جو مثلث کی اندر بنایا جاوے تو وہ مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

(۱۵) قوس ربع ایک دائرہ کی جس کا نصف قطر کہہ کا نصف قطری برابر ہی ایک مثلث کروی کے دو ضلعوں

مجموعہ کی اور قوس ربع اوپر سمت میں برابر ہی جو بی کی اوپر سمت میں کی اوپر نقطہ می پر دو حصوں میں

ایسی تسمیہ کی گئی ہے کہ $\frac{\text{جم}}{\text{جم}} = \text{جب تمام اوس زاویہ کی جو درمیان دو ضلعوں واقع ہے اور یہی مساوی}$

مماس دائرہ کا ہی نقطہ ق ہی نکالا جاوے تو ثابت کرو کہ باقی ضلع مثلث کروی کا برابر ہی قوس ربع ط کے

(۱۶) ایک مثلث کروی اب س کی اندر ایک نقطہ ج ہی اور اسی دائرہ عظیمہ کو قوس کی نقاط

اوب و س تک پہنچ گئی ہیں اور مقابل کے ضلعوں کی نقاط اوب و س پر ملتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب } 1 \text{ اوج}}{\text{جب } 1 \text{ ط}} + \frac{\text{جب } 2 \text{ اوج}}{\text{جب } 2 \text{ ط}} + \frac{\text{جب } 3 \text{ اوج}}{\text{جب } 3 \text{ ط}} = 1$$

(۱۷) رومی زمین پر خط استوا کی ایک جانب میں دو مقام ۱ اور ۲ ہیں اور ۱ زیادہ فاصلہ پر خط استوا
 سی بہ نسبت ۲ کی ہے اگر مقام ۱ کا ۲ سے زیادہ نزدیک ٹھیک مشرق کو بہ نسبت اسکی کہ وہ کسی اور مقام

سی ہو جس کا عرض وہی ہو جو ۲ کا ہے تو سناؤ مقام ۳ کا اسی کیا ہوگا

(۱۸) باب پنجم کی ۱۸ مثال سی امثال مجسم منظم قوی اشنی عشری القواعد کا ثابت کرو

(۱۹) ۱ اور ۲ دو قائم نقطی سطح مستدیر کرہ پر ہیں اور ۱ کی طرف نقطہ سطح مستدیر پر ہی اگر ط ۱ اور ط ۲ مستقل

مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ قائم ہمیشہ اب بالا بنیاد یافت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{طاجم اوج} + \text{ط ۱} = \text{مجم ص ۱}$$

جس میں م ایک مقدار مستقل ہے

(۲۰) کرہ کی سطح مستدیر ۱ و ۲ و ۳... قائم نقاط ہیں اور ط ۱ اور ط ۲ و ط ۳... مقداریں معلوم ہیں

اگر ۱ ایک نقطہ سطح مستدیر کرہ پر + ایسا ہو کہ

$$\text{طاجم اوج} + \text{ط ۱} = \text{مجم ص ۱} = \dots = \text{مقدار مستقل کے}$$

تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ۱ کا ایک دائرہ ہے

باب چہارم

مشنتات کروئی کا حل اعداد میں

(۱۴۴) اس باب میں ہم مثالیں مشنت کروئی کی اعداد میں حل کرنے کی ٹھیکے

اولیٰ مشنت قائم الزاویہ کی مثالیں اور بعد ازاں مشنت غیر قائم الزاویہ کے حل کریں گے

مشنت قائم الزاویہ

(۱۴۵) معلوم ہے کہ ط ۱ = ۳۰، ط ۲ = ۴۰، ط ۳ = ۵۰ اور م = ۶۰

تو ہم ط ۱ سطح دریافت کرتے ہیں کہ

جم طس = جم طاجب طب

$$9584442 = 12 \text{ لجم } 18 \text{ طس}$$

$$9540234 = 14 \text{ لجم } 17 \text{ طس}$$

$$1454008 = 10 \text{ لجم طس}$$

$$4 = 12 \text{ طس}$$

هم در یافت کرتے ہیں

مم = مم طاجب طب

$$1051102455 = 12 \text{ لمم } 18 \text{ مم}$$

$$9594340 = 14 \text{ لجب } 17 \text{ مم}$$

$$20504442 = 10 \text{ لمم + 1}$$

$$15 = 1$$

هم ب در یافت کرتے ہیں

ممب = مم طجب طا

$$954440145 = 14 \text{ لمم } 17 \text{ ممب}$$

$$95484422 = 12 \text{ لجب } 18 \text{ ممب}$$

$$145555555 = 10 \text{ لممب + 1}$$

$$15 = 1$$

$$(148) \text{ معلوم کہ } 1 = 15 \text{ اور } 12 = 10 \text{ اور } 18 = 12 \text{ اور } 14 = 14$$

هم ط در یافت کرتے ہیں

جب طا = جب طس جب

$$9595942 = 14 \text{ لجب } 17 \text{ ممب}$$

$$\text{ل جب } 98^{\circ} 14' 22'' = 32^{\circ} 45' 45''$$

$$\text{ل جب } 56^{\circ} 32' 45'' = 22^{\circ} 41' 45''$$

$$\text{ل جب ط } + 10 = 55^{\circ} 42' 11''$$

$$\text{ط } = 5^{\circ} 44' 25''$$

ہم ب دریافت کرتے ہیں

م ب = جم ط س

یہاں جم ط منفی ہی اسبوا م ب منفی ہوگا اور ب بڑا قائمہ سی ہوگا عددی قیمت جم ط س کی وہی ہی جو جم ا ۸۵ ۳۴ کی ہے

$$\text{ل جم ا } 85^{\circ} 34' = 45^{\circ} 43' 15''$$

$$\text{ل س } 56^{\circ} 32' 45'' = 2^{\circ} 14' 34''$$

$$\text{ل م } (180 - \text{ب}) + 10 = 46^{\circ} 41' 31''$$

$$180 - \text{ب} = 28^{\circ} 12' 27''$$

$$\text{ب} = 101^{\circ} 46' 54''$$

ہم ط ب دریافت کرتے ہیں

س ط ب = س ط س جم

یہاں س ط س منفی مین اسکی س ط ب منفی ہوگا اور ط ب بڑا ریعوی ہوگا

$$\text{ل س ا } 85^{\circ} 34' = 46^{\circ} 41' 31''$$

$$\text{ل جم } 56^{\circ} 32' 45'' = 21^{\circ} 24' 45''$$

$$\text{ل س } (180 - \text{ط ب}) + 10 = 88^{\circ} 18' 45''$$

$$180 - \text{ط ب} = 25^{\circ} 28' 32''$$

$$\text{ط ب} = 154^{\circ} 21' 38''$$

(۱۴۹) معلوم ہے ۱ = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ اور ۱۰ = ۹۰ اور ۱۸ ۲۲ = ۴۵
اب ہم طس دریافت کرتے ہیں

$$\text{جب طس} = \frac{\text{جب ل}}{\text{جب ا}}$$

$$\text{ل جب طس} = ۱۰ + \text{ل جب ط} - \text{ل جب ا}$$

$$۱۰ + \text{ل جب ل} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۱۹ ۵ ۸ ۲۸ ۱۲ ۴۲$$

$$\text{ل جب ل} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۹ ۵ ۸ ۵ ۸ ۸ - ۴۵$$

$$\text{ل جب طس} = ۹ ۵ ۹ ۴ ۳۲۰۷$$

$$\text{طس} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۱۰ ۱۷ ۱۰ ۱۷$$

اب ہم طب دریافت کرتے ہیں

$$\text{جب طب} = \text{مس طامم}$$

$$\text{ل مس} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۴۵ ۵۹ ۱۹ ۸۳$$

$$\text{ل مم} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۴۵ ۸۰ ۹۳ ۸۹$$

$$\text{ل جب طب} + ۱۰ = ۱۰ ۱۳ ۷۲ = ۱۹ ۵۹ ۲۰ ۱۳ ۷۲$$

$$\text{طب} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۵۰ ۶۳ ۱۱۹$$

اب ہم ب دریافت کرتے ہیں

$$\text{جب ب} = \frac{\text{جم ب}}{\text{جم ط}}$$

$$\text{ل جب ب} = \text{ل جم ب} - \text{ل جم ط} + ۱۰$$

$$۱۰ + \text{ل جم ب} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۱۹ ۵۹ ۳۹ ۷۵ ۷۲$$

$$\text{ل جم ب} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۹ ۵ ۸ ۵ ۸ ۸ - ۴۵$$

$$\text{ل جب ب} = ۹ ۵ ۸ ۵ ۸ ۸ - ۴۵$$

$$\text{ب} = ۲۵ ۱۵ ۲۵ ۴۵ = ۱۰ ۱۷ ۱۰ ۱۷$$

مثلثات غیر قائم الزاویہ

(۱۶) طا = ۲۰ ۱۷ ۲۰ ط ب = ۲۰ ۱۷ ۲۰ ۱۰ ۲۸ ۳۸ = ۱۰

اب ہم صورت دفعہ ۵ کو کام میں لائے ہیں

مس ۱ = $\frac{\text{جب (م-ط ب) جب (م-ط س)}}{\text{جب م جب (م-ط ا)}}$

۲۰ ۱۷ ۲۰ ۲۰ = م

م-طا = ۸ ۵۸

م-ط ب = ۲۹ ۱۸ ۱۰

م-ط س = ۲۴ ۲۰ ۱۰

ل جب ۲۹ ۱۸ ۱۰ = ۱۰ ۴۵۴۴۳۷۰۷

ل جب ۲۴ ۲۰ ۱۰ = ۱۰ ۴۵۸۱۱۹۷۴۸

۱۹۵۵۰۸۳۷۷۲

ل جب ۲۴ ۲۰ ۱۰ = ۲۰ ۴۵۹۲۲۷۴۵

ل جب ۸ ۵۸ = ۴۵۱۹۲۷۳۷۲ =

۱۹۵۱۸۷۹۸۰۷

۱۹۵۵۰۸۳۷۷۲

۱۹۵۱۸۷۹۸۰۷

۲ ۵۳۳۳۳۴۴۵

ل مس ۱ = ۱۰ - ۱۰ ۱۴۱۴۸۳۲ = ۵

۳۸ ۲۵ ۵۵ = ۱۴

۱۴ ۵۱ ۱۱۰ = ۱

اوسکا طرح بہتر یافت کرتے ہیں

ل جب ۸ ۵۸ = ۴۵۱۹۲۷۳۷۲ =

ل جب ۲۴ ۲۰ ۱۰ = ۱۰ ۴۵۸۱۱۹۷۴۸

۱۹۵۵۰۸۳۷۷۲

$$95492245 = 20 \text{ ل } 12 \text{ ج } 24$$

$$95494200 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$1954184149$$

$$1950000000$$

$$1954184149$$

$$2 \overline{) 1954184149}$$

$$1954184149 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$95494200 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$20 \text{ ل } 12 \text{ ج } 24 = 20$$

$$18 \text{ ل } 29 \text{ ج } 20 = 18$$

اس طرح سے دریافت کرتے ہیں

$$951922342 = 58 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$95494200 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$1954184100$$

$$95492245 = 20 \text{ ل } 12 \text{ ج } 24$$

$$954119648 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$1954184100$$

$$1954184100$$

$$1954184100$$

$$2 \overline{) 1954184100}$$

$$1954184100 = 10 \text{ ل } 18 \text{ ج } 29$$

$$18 \text{ ل } 29 \text{ ج } 20 = 18$$

$$18 \text{ ل } 29 \text{ ج } 20 = 18$$

(۱۷۱) معلوم می‌گردد $48 \times 20 \times 25 = 24000$ ط = طب = $52 \times 18 \times 25$

س = ۱۱۷ ۱۲ ۲۰ بموجب دفعہ ۸۲ کے

$$\text{مس } \frac{1}{2} (1 + \text{ب}) = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} (\text{طا} - \text{طب})}{\text{حجر } \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب})} \text{ مم } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\text{خس } \frac{1}{2} (a-a) - \text{جس } \frac{1}{2} (a+b)}{\text{جس } \frac{1}{2} (a+b)}$$

$$\frac{1}{7} (ط - طب) = \frac{1}{7} ١٨٥ = (ط + طب) \frac{1}{7} ٢٠١٩٠ = س \frac{1}{7} ٢٠١٩٠ = ١٠٠٣٤٥٨$$

۹۵۹۵۷۳۳۵ = ۵۱۸ جم

95 685549. = 1.4488 حجم

1936A13-20

لجم 4. 14 = 2. 12. 9544N

$$1.5 \times 10^4 \text{ g} = \frac{1}{2} (1 + p) \times 10^4 \text{ g}$$

$$N \cdot \Delta = (p+1) \frac{1}{p}$$

الحب ا ٥ = ٨٠ ٢ ٤ ٥ ٩

$\frac{95 \angle 85.54^\circ}{1.543 \angle 0^\circ} = 10.44 \angle 85.54^\circ$

959384314 = 4.19 4. حبيب

۱۵۹۹۱۱۴۵۴ = (۱-ب) مس

$$14 \quad 135 \div 5 = (4-1) \frac{1}{4}$$

اسی طرح $1 = 54 \quad 14 = 51$ اور $55 = 14$

طس کو اس صورت سے دریافت کریں کہ

جب طاس = جب طاس

چونکہ جب سب بڑا جب ۱ سہی تو ہم دو مختلین طس کے پٹری طاسے دریافت کرینگے
اور ہم کو یہ نہیں معلوم ہوگا کہ کونسی قیمت ہم ملے

اس نئی ہم طس کو دفعہ ۴ کی صورت (۱) سے دریافت کرتی ہیں جس کو یہی نسبتہ ہمیں واقع ہوتا

$$\text{جہم طس} = \text{جہم } \frac{1}{2} (\text{طا} + \text{طب}) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$\text{جہم } \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ا})$$

$$\text{ل جہم } 40 \text{ } 19 \text{ } 40 = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

$$\text{ل جب } 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120 = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

$$\text{ل جہم } 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120 = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

$$\text{ل جہم } \frac{1}{2} \text{ طس} = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

$$\text{طس} = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

$$\text{طس} = 40 \text{ } 49 \text{ } 49 \text{ } 120$$

یہاں دفعہ ۴ کی دوسرے ترکیبے کام میں لائیں۔ اول ہم کو صورت مس = مس طب ہم سے دریافت کرتے ہیں

یہاں جہم منفی ہی سہی مس منفی ہوگا اور برابر قائمہ کی اور عدد قیمت جہم کی وہی جو جہم ۴۲ ۴۲ ۴۲ ۴۲ کی ہے

$$\text{ل مس } 40 \text{ } 18 \text{ } 40 = 40 \text{ } 18 \text{ } 40$$

$$\text{ل جہم } 40 \text{ } 18 \text{ } 40 = 40 \text{ } 18 \text{ } 40$$

$$\text{ل مس } (40 - 18) = 40 - 18 = 22$$

$$40 - 18 = 22$$

$$40 - 18 = 22$$

یہاں ہم طس کو اس صورت سے دریافت کرتے ہیں کہ

$$\text{جہم طس} = \text{جہم طب} \text{ جب } (\text{طا} - \text{ر})$$

یہاں جہم منفی ہی اور سہی جہم طس منفی ہوگی اور طس بڑا زاویہ قائمہ سی ہوا اور عددی قیمت

جہم رکی وہی ہوگی جو جہم (۴۰ - ۱۸) کی ہے یعنی جہم ۴۰ ۴۰ ۴۰ ۴۰ کی اور قیمت جہم (طا - ر)

کی وہی جو جہم (ر - طا) کی یعنی جہم ۴۰ ۴۰ ۴۰ ۴۰ کی

$$ل \text{ حجم } ۵۲ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۵ = ۹۵۷۴۳۷۸$$

$$ل \text{ حجم } ۸۱ \text{ } ۳۰ = ۹۵۱۹۱۹۰۴۰$$

$$ل \text{ حجم } ۳۰ \text{ } ۳۴ \text{ } ۳۳ = ۱۸۵۷۸۲۸۰۸$$

$$ل \text{ حجم } ۸۰ \text{ } (طس) = ۹۵۰۷۳۷۷۸۹$$

$$۱۸۰ - طس = ۱۷ \text{ } ۳۹ \text{ } ۸۳$$

$$طس = ۹۴ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳$$

جدولون میں نہایت قریب تعداد تانیوں کی پیمائی دو نو ترکیبوں میں تانیوں کے اندر تانیہ کا فرق رہا ہے
اگر ہم تانیوں میں ازلی کسروں کا بھی حساب لگائیں تو دو نو ترکیبوں میں تعداد تانیوں کی پیمائی ہوگی
(۱۷۲) معلوم ہے کہ $۵۰ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ = طس = ۹۴ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ = ۱۰ \text{ } ۲۲ \text{ } ۸۷$

بموجب دفعہ ۸۷ کے جب ب = $\frac{\text{جب طس}}{\text{جب ط}}$

$$ل \text{ جب } ۹۴ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ = ۹۵۷۴۰۷۴۲۴$$

$$ل \text{ جب } ۸۷ \text{ } ۲۲ = ۹۵۸۸۴۵۲۵$$

$$ل \text{ جب } ۵۰ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ = ۹۵۸۸۸۹۹۵۴$$

$$ل \text{ جب ب } = ۹۵۹۲۴۷۱۴۵$$

$$ب = ۵۷ \text{ } ۲۵ \text{ } ۱۲۲$$

اس صورت میں دو حل ہوئے دفعہ ۸۷ کو دیکھو۔ ہم س اور طس کا حساب مماثلات پیمائی ہی

$$\text{اس طرح حل کرینگے کہ مس } \frac{1}{10} = \frac{\text{حجم } \frac{1}{10} (\text{طس} - \text{طا})}{\text{حجم } \frac{1}{10} (\text{طس} + \text{طا})}$$

$$\text{مس } \frac{1}{10} \text{ طس} = \frac{\text{حجم } \frac{1}{10} (\text{طس} + \text{طا})}{\text{حجم } \frac{1}{10} (\text{طس} - \text{طا})} \text{ مس } \frac{1}{10} (\text{طس} + \text{طا})$$

اول چھوٹی قیمت ب کی دریافت کرو اس طرح کہ

$$\frac{1}{10} (\text{طس} + \text{طا}) = ۵۰ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ \text{ اور } \frac{1}{10} (\text{طس} - \text{طا}) = ۲۰ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳$$

$$ل \text{ حجم } ۹۴ \text{ } ۲۰ \text{ } ۷۳ = ۹۵۷۴۳۷۸$$

$$\frac{45948534}{195443-944} = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$\frac{454491886}{105239-944} = \text{لجم } 59 \text{ } 50$$

$$105239-944 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$155358.56 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$505456 \text{ } 15 = \text{س}$$

$$456491.39 = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$\frac{1052382489}{2050363628} = \text{لنس } 54 \text{ } 54$$

$$\frac{459481062}{1050702454} = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$1050702454 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

$$1052382489 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

$$14571195 = \text{طس}$$

اب بڑی قیمت ب کی دریافت کرو پس

$$2953124 = (1-ب) \frac{1}{2} \quad 39532383 = (1+ب) \frac{1}{2}$$

$$4594827730 = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$450436246 = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$1950580626$$

$$454491886 = \text{لجم } 59 \text{ } 50$$

$$452588880 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$15585212 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$31547725 = \text{س}$$

$$45408349 = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$1052382489 = \text{لنس } 54 \text{ } 54$$

$$1952491051$$

$$458903747 = \text{لجم } 50 \text{ } 58 \text{ } 30$$

$$457086477 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

$$32347217 = \text{لنس } \frac{1}{2} \text{ طس}$$

$$55272528 = \text{طس}$$

بہت سی مثالیں طالع طالع بنا سکتی ہیں اور ان کا ثبوت انہیں مثالوں سے ہو سکتا ہے مفاد پر معلوم کرو

مقادیر مطلوبی بالین و در صورت لزوم کو مفاد زیر معلوم یا بعضی مثلثون کو کام میں لائیں

امثلہ

- (۱) معلوم ہی طب = ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ = ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ س = ۹۰
- نتیجہ طس = ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ = ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹ ب = ۱۴۷ ۱۴۸ ۱۴۹
- (۲) معلوم طس = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ س = ۹۰
- نتیجہ طب = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- (۳) معلوم کہ ۱ = ۳۴ ب = ۹۰ س = ۹۰
- نتیجہ طا = ۳۴ ۳۵ ۳۶ = ۳۴ ۳۵ ۳۶ س = ۳۴ ۳۵ ۳۶
- (۴) معلوم کوطا = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ س = ۹۰
- نتیجہ طس = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- باطس = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- (۵) طس = ۹۰ = ۹۱ ۹۲ = ۹۱ ۹۲ ب = ۹۱ ۹۲
- نتیجہ س = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- (۶) معلوم طس = ۹۰ = ۹۱ ۹۲ = ۹۱ ۹۲ ب = ۹۱ ۹۲
- نتیجہ س = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- (۷) طا = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ س = ۹۰
- نتیجہ ۱ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳
- (۸) ۱ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ س = ۹۰
- نتیجہ طا = ۹۱ ۹۲ ۹۳ = ۹۱ ۹۲ ۹۳ ب = ۹۱ ۹۲ ۹۳

تمت تمام کتابیں شکر و